УДК 519:512

Г.Н. Зверев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА В ОСНОВАНИЯХ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

Информационный подход к описанию и реализации математических систем и процессов позволяет формализовать их семантику, целевую ориентацию, критерии функционирования. Изложены системологические и семиотические расширения логико-математических формализмов, которые приближают язык математики к информационным языкам автоматизации человеческой деятельности, позволяют произвести редукцию базисных понятий математики и логики к конструктам информатики и искусственного математического интеллекта, построить обобщенную модель математики как информационной системы и технологии. Анализируются парадоксы неконструктивной потенциальной и актуальной бесконечности – основных объектов современной математики, противоречащих пятой аксиоме Евклида «целое больше части». *Информатика, математика, логика, семантика, бесконечность, истинность.*

Теоретическая информатика как наука о фундаментальных законах строения и функционирования информационных (знаковых) систем, объектов, процессов в живой природе и в искусственной среде, созданной людьми, возникла на стыке математики, естественных и технических наук под названием «кибернетика» в ответ на потребности автоматизации, охватившей все сферы человеческой деятельности: **исследование** существующей информационно-материальной реальности (диагноз, прогноз, ретрогноз), **проектирование** (планирование, конструирование) новой реальности, воплощение проектов в жизнь путем **управления** системами и ситуациями при достижении поставленных целей.

Теоретическая информатика-кибернетика в своих основаниях опирается на общую теорию систем – **системологию**, теорию знаковых систем – **теоретическую семиотику**, теорию математических и семиотических неопределенностей – **индефинитику**, теории, составляющие её основные разделы. Теоретическая информатика изучает знаковые явления во всех её проявлениях от выделения, распознавания и элементарного счета объектов до сложнейших процессов мышления при исследовании, проектировании, управлении и решении фундаментальной научной проблемы создания искусственного интеллекта.

С момента возникновения и по сей день информатика занимается материальным воплощением математических конструкций – моделей объектов и процессов всех предметных областей в информационных языках и технологиях, в программно-аппаратных средствах автоматизации, алгоритмизации, программирования, моделирования материально-информационных явлений в вычислительной среде. Материализованная продукция информатики существенным образом использует язык классической логики и математики, вместе с тем накопленный в этой области опыт выявил серьезные ограничения современного логико-математического языка в приложениях к проблемам автоматизации человеческой деятельности, замены людей автоматами и создании систем искусственного интеллекта. Пути преодоления мешающих ограничений давно дискутируются в математике, в других науках и затрагивают фундаментальные принципы математики и ее оснований.

1. Современная математическая семантика

Вначале уточним смысл термина “математика”. Если математику представить изолированной системой, то можно принять к сведению “самоприменимые” определения математики для математиков, недоступные непосвященным, скажем, определения Д. Гильберта с характерной для чистого математика ссылкой на интуицию: “Это то, что под этим понимают компетентные люди” [1], или определения К. Г. Я. Якоби: “Математика – наука, которая ясна по своей сути”, см. [2]. Ж. Дьеддоне формулирует свое представление о современной математике таким выражением: “Это запутанный клубок шерсти, в котором все части математики взаимосвязаны друг с другом почти непредвиденным способом” [3]. А. Н. Колмогоров дал для энциклопедий такое определение: “Математика – наука, изучающая количественные формы и пространственные отношения действительного мира”, впрочем, современная математика изучает также и качественные формы и нечисловые свойства реальности. Большинство математиков считают математику объективной наукой, однако некоторые представители чистой математики (Г. Харди, Н. Бурбаки, Ж. Дьеддоне) определяют ее как субъективную науку – свободную игру символов, управляемую математической интуицией.

С позиций теоретической информатики математика есть информационная (знаковая) система, информационная технология исследования знаковых структур и процессов, а также информационный язык для внутреннего и внешнего использования при построении понятий, моделей и теорий предметных областей. Внутри себя математическая система содержит взаимодействующие подсистемы и знаковые процессоры – носители естественного и искусственного интеллекта – это математики, базы знаний, программно-аппаратные средства информационных технологий, которые реализуют функционирование логико-математического языка (ЛМЯ) в среде естественного языка (ЕЯ), прагмы и парадигмы ЛМЯ и ЕЯ. С этих позиций математические объекты и процессы, очевидно, подчиняются фундаментальным законам и критериям информатики.

Традиционно математику делят на чистую, или теоретическую, и прикладную. Чистая математика, т. е. очищенная от конкретного содержания, решает внутренние проблемы математической системы, исследуя её основания, природу математического опыта, создает и изучает предельные математические абстракции, предельно строгие методы порождения и преобразования произвольных математических объектов и процессов, их свойств и связей. Прикладная математика создает способы решения задач предметных областей вне математики, используя ту или иную менее абстрактную семантику предметики, приближенные модели и методы решения задач, и во многом совпадает с информатикой, а точнее сказать, с алгоритмикой. Некоторые ученые возражают против такого деления, считая науку единой [5], как и едиными требования к разделам науки, вместе с тем существенным в этом вопросе является необходимость использования предметной семантики и целевой ориентации прикладных задач при построении соответствующего раздела математики, в остальном прикладная математика строится по тем же строгим канонам, что и теоретическая математика, используя базисные понятия последней.

Системный подход к накопленным к концу девятнадцатого века математическим знаниям неявно, но по существу был предложен Г. Кантором за полвека до создания теории систем под общим названием “теория множеств”, в которой математические объекты и понятия определяются как множества (системы, совокупности) взаимосвязанных элементов произвольной природы, что позволило унифицировать многие разделы математики, однако вскоре выявились противоречия, антиномии в исходных математических конструкциях. Было предложено много, в общем случае несовместимых, вариантов преодоления кризиса в основаниях математики, это привело в конечном итоге к разделению чистой математики на классическую и конструктивную математику, они отличаются подходами к вопросам о логических правилах оперирования и доказательств существования бесконечных математических объектов. Классическое направление базируется на понятиях теории множеств, созданной Кантором для конечных и потенциально либо актуально бесконечных объектов и их множеств, на классической математической логике, допускает неконструктивные доказательства существования математических объектов [1,6]. Конструктивное направление в математике поддерживается немногочисленными приверженцами, которые отвергают неконструктивные доказательства существования абстрактных объектов, актуальную бесконечность, законы исключенного третьего и двойного отрицания, заменяют классическую логику интуиционистской или конструктивной логикой [7-11].

Идейный раскол в среде математиков выявил прежде всего неполноту формализации математической семантики и элементы субъективизма в основаниях математики. Противоборствующие стороны, прежде всего Д. Гильберт и Л. Е. Я. Брауэр, не нашли веские доводы и объективные причины в обосновании предлагаемых изменений математических принципов, поэтому кризис оснований математики 1900-1930 годов, по сути, не был разрешен и идейные противники остались при собственном мнении об истинных и объективных основаниях, о путях устранения возникших логических противоречий и математических патологий. Наиболее ярким примером последних служит строго доказанная в системе аксиом теории множеств Цермело – Френкеля ZF теорема Банаха – Тарского о конечном разбиении шара на части, из которых простым перемещением можно составить два таких же шара, что противоречит интуиции, законам сохранения и пятой аксиоме Евклида "целое больше части", так как части в совокупности оказались вдвое больше исходного целого, а повторяя этот процесс с частями, получаем "больше" в произвольное число раз.

2. Информационная семантика и объективация оснований математики

Математику считают (не только математики, но и ученые естественных и технических наук) наиболее объективной наукой, наряду с физикой, так как она изучает предельно строгие методы порождения и преобразования произвольных абстрактных объектов, их свойств и связей между собой и с реальностью, выражающих фундаментальные знания и "вечные истины", а последние, как хорошо известно, время от времени подвергаются критике, попыткам опровержения и усовершенствования. Основным источником субъективности в теоретической математике являются ее основания, сформулированные в неформализованной информационной среде естественного языка и мышления, опирающиеся на человеческую интуицию, кажущуюся ясность и очевидность исходных принципов, непосредственную данность истины и логических правил ее преобразований. Источниками субъективности в прикладной математике служат неадекватности исходных данных и моделей, результатов формализации и интерпретации, относительная свобода выбора постановки математической задачи, ее критериев, априорики реальной информационной ситуации и т. д.

В теоретической информатике-кибернетике, как и ранее в математике и логике, многократно предпринимались попытки более полной объективации и формализации знаковых объектов и процессов, математической и предметной семантики, замены интуиции естественного интеллекта и веры в ясность, истинность и очевидность аксиом конструктивным воспроизведением в объективированной информационной среде процессов естественного математического мышления. Однако материализованная вычислительная интерактивная среда и функционирующие в ней информационные языки построены на математических основаниях, с использованием базисных математических понятий, моделей и принципов. В чистой (классической и конструктивной), прикладной математике давно сложилось убеждение, что никакая наука не может быть исходным базисом для математики, а интуиция естественного математического мышления и парадигма языка являются основным средством введения базисных математических понятий и принципов, обоснование которых опирается на ясность и очевидность, непосредственную данность математическому интеллекту критериев истины и логических правил ее преобразований. Это мнение математиков наиболее точно сформулировал А. Гейтинг: никакая наука не может служить предпосылкой для математики, и было бы порочным кругом применять какие-либо иные принципы в рассуждениях, так как в их формулировке лежат математические понятия, поэтому не остается никакого другого источника, кроме интуиции, которая с непосредственной ясностью помещает перед нашими глазами математические понятия и выводы, см. [12]. Тем самым отвергаются всякие научно обоснованные возможности редукции математических понятий и принципов к более глубоким и содержательным конструкциям.

Теоретическая информатика как фундаментальная наука о знаковых математических, биологических и т. д. системах и процессах, очевидно, использует язык математики, но в

своей основе базируется на иных предельно общих межпредметных понятиях, таких как **система**, **объект**, **процесс**, **связь**, **состояние**, **свойство**, **знак**, **язык**, **цель**, **критерий** и других абстрактных понятиях, изучаемых в системологии, теоретической семиотике, сенсфорике [4]. Эти понятия в математике не формализованы и используются на интуитивном уровне, в уточнении и развитии их семантики участвовали ученые многих предметных областей, в том числе математики и логики
Ч. Пирс, Г. Фреге, Дж. Пеано, Б. Рассел, А. Туэ, Г. Гермес, Н. Бурбаки, Х. Карри и др., которые активно исследовали основания математики, названные Д. Гильбертом **метаматематикой**. Последняя включает теорию множеств и математическую логику в виде системы аксиом финитного формализма Гильберта в классической математике либо интуиционистской логико-математической системы конструктивной математики Брауэра – Гейтинга – Маркова, а также формализованную арифметику и теорию алгоритмов: частично-рекурсивные функции, машины Тьюринга и Поста [6, 12-15].

В метаматематике исходя из субъективных соображений были введены формальные, семантически не вполне обоснованные барьеры свободным математическим абстракциям, устраняющие известные антиномии и математические патологии в аксиоматической системе ZF (или ZFC, включающей полузапрещенную аксиому выбора *C*) и в более поздних аксиоматизациях, например, в известной системе NBG Неймана – Бернайса – Гёделя, в которой вводится понятие класса – немножества или слишком большого сверхмножества [16]. Подобные ограничения абстракций теории множеств на какое-то время успокоили математическую общественность, но проблему не решили и реально никак не повлияли на основные разделы математики и практику математических исследований.

В конце двадцатого века вновь оживился интерес к анализу оснований математики, возможностей и ограничений популярного аксиоматического метода, появились публикации с критикой пустых математических абстракций, “голых” формальных конструкций, оторванных от естественной семантики науки, техники, насущных проблем общества как единой материально-информационной системы, в которой математика представляется одной из важных подсистем, обслуживающих науку, образование и другие сферы деятельности, см., например, работы В. И. Арнольда [5, 17].

Попытки преодоления принципиальных ограничений традиционного логико-математического языка и более полной формализации и объективации математических объектов и процессов, их семантики предпринимались с момента появления вычислительных машин при создании универсальных решателей задач, программных моделей искусственного математического интеллекта в надежде на то, что математика и логика – это наиболее формализованные предметные области и в них будет легче реализовать процедуры естественного логико-математического мышления, однако достаточно продвинутая реализация этих идей столкнулась с трудностями воспроизведения в искусственной среде базисных понятий математики из-за их конструктивной неопределенности и исходной опоры на интуицию.

Очевидные успехи этого направления исследований и разработок составляют пакеты символьных вычислений компьютерной алгебры и “машинные”, признанные далеко не всеми математиками, доказательства трудных теорем чистой математики (о четырех красках, о пушечных шарах Кеплера и др.), знаменующие явные изменения технологии математических исследований и границ их автоматизации. Однако более серьезные преобразования математической системы связываются с перестройкой ее оснований и определением согласованной информационной семантики базисных (неопределяемых) понятий математики. В еще большей степени в подобной перестройке нуждается прикладная математика, так как выразительные возможности и эффективность функционирования предельно строгого математического языка заметно теряются при переходе от идеальных математических объектов и преобразований к понятиям и моделям реальных предметов, к информационным структурам и процессам, подверженным искажениям, с их неполной формализацией, неопределенностями и противоречиями.

Воплощение идей расширения формализаций может быть основано на уточнении смысла таких привычных для естественного интеллекта понятий, как объект, знак, язык, математический субъект, знание, неопределенность, сложность, случайность и другие межпредметные понятия, с последующей их материализацией в системе искусственного интеллекта, что обеспечит в перспективе более полное описание и представление знаковых процессов чистой и прикладной математики, построение процессоров, реализующих преобразования символьной и семантической информации, замену математической интуиции и веры в очевидность аксиом конструктивным воспроизведением (с определенной степенью адекватности) в информационной системе знаковых объектов и процессов естественного математического языка и мышления, операций абстрагирования - конкретизации, обобщения –специализации, формализованной математической и логической семантики [4].

Прежде всего, уточним смысл понятия интуиции, которое используется при характеризации естественного математического интеллекта. Оно произошло от позднелатинского intuitio – созерцание в значении *intueor* – "пристально смотрю", а в современном научном представлении **интуиция** – это механизм априорного субъективно истинного решения, присущий любому естественному интеллекту, основанный на врожденных или приобретенных знаниях и предшествующем опыте, это способность мышления постичь истину, отделить ее от лжи путем непосредственного ее усмотрения без видимой совместной переработки фактических и априорных данных о реальной информационной ситуации, без рассуждений и обоснований принимаемого решения, вместо необходимого доказательства, отделяющего веру от неверия и сомнения.

Алгоритмы, автоматизмы интуиции зарождаются в процессах становления и роста человеческого мозга, переработки информации о внешнем мире, о внутренней среде организма и образования сенсомоторных понятий, их абстрагирований и обобщений, формирования механизмов логико-математического (а также образного, художественного и т. д.) мышления, которое способно выделить достоверные знания, не опровергнутые предшествующим опытом, но по мере поступления новых фактов и идей какие-то знания могут быть переведены в разряд интуитивно неочевидных, сомнительных, неопределенных либо заведомо ложных, при этом, несомненно, ум математика, который формируется под влиянием окружающей среды, и присущая ему изменяющаяся интуиция вряд ли принципиально отличаются от аналогичных весьма причудливых механизмов мозга нематематика и также подвержены ошибкам и заблуждениям. Разнообразие стилей математического мышления не поддается учету, две крайние формы – интуитивно-эмоциональный и формально-логический стиль описаны Пуанкаре в [18].

Математическую интуицию исследовали многие выдающиеся математики двадцатого века, особенно активно после того, как неевклидовы геометрии и теория относительности подорвали абсолютную веру в надежность геометрической интуиции. Анри Пуанкаре в книге "Ценность науки" писал: "Интуиция не может дать нам ни строгости, ни даже достоверности… интуиция может обмануть нас…" [18]. Давид Гильберт: "Подумайте: в математике – этом образце достоверности и истинности – образование понятий и ход умозаключений… приводит к нелепостям. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?" [19]. Герман Вейль посвятил несколько сочинений математическому мышлению, интуиции, истинности, см. [7]. В работе "О новом кризисе оснований математики" он изложил свою позицию: "Как ни крути, а очевидность остается последним источником истины и познания. Брауэр основывал на ней математику, Гильберт – уверенность в (ожидаемой) непротиворечивости математики. Но очевидность никогда не может привести к установлению окончательных правил и уберечь от заблуждения. Поэтому границы, до которых простирается брауэровская математика, остаются смутными; и нельзя быть также уверенным в том, что, строя математические рассуждения в соответствии с гильбертовской программой, разные авторы порой не перегнут палку в отношении очевидности" [20]. Более определенно на эту тему высказался Рихард фон Мизес: “Невозможно принять за основу математики лишь заявление о ее самоочевидности уже только потому, что нет соглашения, какие заявления в действительности относятся к этому классу”, и далее “Ни одно из трех направлений в основаниях математики – интуиционизм [Брауэра], формализм [Гильберта] и логицизм [Рассела, Фреге, т. е. сведение математики к логике] не в состоянии полностью осмыслить отношения между тавтологическими [формально-логическими] и (внематематическими) опытными проверками, что является их истинным намерением, то есть сделать эти отношения частью самой математики” [2], а именно так считал Д. Гильберт: “Расширяясь, математика в известной степени превращается в третейский суд, в трибунал высшей инстанции” [1].

Формализацию информационных оснований математики начнем с предельно общего понятия системы, т. е. произвольного объекта, имеющего внутреннюю (в общем случае иерархическую) структуру, внешние связи, внутрисистемную и надсистемную целевую ориентацию и выполняющего определенные ролевые функции. Если структура системы не представлена в модели, то вместо термина “система” используют другие слова синонимического ряда: объект, компонент, элемент, праэлемент, а стандартная формула двухуровневого представления систем в информатике и в других предметиках выглядит так: “Система состоит из объектов”. Изменения во времени состава, структуры, функций, связей в системе и в ее объектах называются процессом. Предельно общие межпредметные понятия системы, объекта, процесса, а также пространства – вместилища систем и времени – динамической координаты материально-информационной реальности играют исключительно важную организующую роль в математической семантике, но входят в нее как неопределяемые понятия интуитивного уровня естественного математического интеллекта, для определения и материализации которых в искусственной информационной среде явно недостаточно вложенной в них абстрактной семантики, формализованной математической аксиоматики, и потребуются дополнительные “вливания” более конкретной семантики математических дисциплин и внематематических предметик.

В чистой математике системный подход в явной форме был заявлен Н. Бурбаки [21,22] в 1948 году одновременно с рождением кибернетики-информатики: “Руководствуясь концепцией аксиоматики, попытаемся представить… математический мир в целом”, “…математика окидывает единым взглядом огромные области, унифицированные аксиоматикой, в которых некогда, как казалось, царил самый бесформенный хаос… и упорядочивающим принципом будет концепция *иерархии структур*, идущей от простого к сложному, от общего к частному” [23]. В основе общего подхода Бурбаки к математической системе лежит теория множеств Кантора, в которой, правда, неопределяемое понятие “множество” заменено также неопределяемым понятием “математическая структура”.

На интуитивном уровне подобную замену можно истолковать с информационной точки зрения следующим образом. Множество элементов любой природы есть простейшая модель произвольной системы, а само понятие множества есть предельная абстракция понятия системы. В этой абстракции отвлекаются от внутренних связей и отношений объектов системы – элементов множества, а также от внешних связей системы, которые, как и внутренние связи, явно или неявно задаются в теории множеств иными способами. В понятие математической структуры, в отличие от множества, включаются элементы множеств – математические объекты вместе с их связями и отношениями между элементами, что фактически совпадает с понятиями графа и сети, определяемых в математике посредством понятия множества, см. [4], где описана иерархия абстракций от реальной системы до структурной модели системы в виде обыкновенного графа. К сожалению, Н. Бурбаки не дал формального определения понятия математической структуры.

Системный подход к чистой математике, провозглашенный Бурбаки, не был доведен до логического завершения не только из-за неимоверно большого труда “описать аксиоматически все здание математики целиком”, но прежде всего по причине отсутствия в то время четких системных оснований – формализованного системологического базиса, а также из-за необоснованных требований аксиоматического подхода к математике, выдвинутых Гильбертом и поддержанных большинством математиков, сводящихся к тому, чтобы "очистить" математические абстракции от конкретной семантики, что привело в конечном итоге к отрыву чистой математики и семантики ее оснований от семантик других наук. Рене Том в [24] писал: "…старая надежда Бурбаки увидеть математические структуры, естественно возникающие из иерархии множеств, из их подмножеств и из их комбинаций, является, несомненно, лишь иллюзией", см. [16].

3. Математические объекты в базисах информатики

Переход от общего понятия "система" к абстрактному математическому понятию "множество" сопровождается потерей (отбрасыванием) значительной части дескриптивной информации о контовой и дентовой семантике, оставляя лишь описание минимальных по информативности свойств системы объектов в понятии множества элементов, таких как двоичное свойство принадлежности, свойства численности (мощности множества) и различимости его элементов, см. [4]. Переход от понятия объекта к математическому понятию "элемент множества" также сопровождается исключением индивидуальной семантической информации о материально-информационном объекте, оставляя в абстракте лишь данные о принадлежности объекта системе (элемента множеству) и какие-либо ключевые свойства, отличающие данный элемент от других элементов. Дентом понятия объект может быть выделенный материальный предмет, физическое явление либо информационный объект, знаковая структура, а его контом – описатель свойств и связей дента с другими объектами и системами. Дентом теоретико-множественного понятия "элемент" будет знак, исходный конт, опосредованно представляющий материально-информационные явления, а контом (вторичным) понятия "элемент" будет набор свойств и связей, отношений с другими знаками – элементами множества и других множеств [4].

Следующий шаг в иерархии абстракций общего понятия "объект" и математического понятия "элемент множества" состоит в отвлечении от всех свойств и связей объекта, кроме свойства реального, дентового либо виртуального, контового существования объекта-элемента, его непосредственной данности естественному или искусственному интеллекту (о видах существования см. далее, а также [4]. Этот уровень абстракции понятия объекта есть **единица** – единый объект, единый знак, выделенный на данном уровне системной иерархии (которую следует отличать от иерархии абстракций). В математике понятие единицы имеет много разных смыслов: в арифметике – наименьшее из натуральных чисел, в общей алгебре – нейтральный элемент бинарной операции, участвующий в определении взаимно-обратных элементов абстрактного множества, в теории величин – неограниченно копируемая и дробимая единица измерения, иной смысл единицы в теории матриц, решеток, категорий и т. д. Понятие единицы, порожденное прямым наследованием контов и дентов понятия "единичный объект" прежде всего относится к арифметике и теории величин, в других математических дисциплинах единица появляется при частичном совпадении абстрактных контов со свойствами натуральной и вещественной единицы. В последнем случае в теории величин, в теории геометрических измерений предполагается, что единичный объект точно воспроизводим неограниченное число раз и каждая из его частей опять может быть разделена на произвольное число частей – подобъектов.

Для материализации общих понятий системы и объекта в искусственной информационной среде, а также их конкретных представителей в [4] вводится системологический базис первичных понятий теоретической информатики: полюсник, полюс, уза, оболочка, узел, состояние, связь, преобразование, однозначно определяемые в естественном и искусственном интеллекте и позволяющие в конструктивной форме описать произвольные материально-информационные структуры и системные роли всех модельных конструкций, в том числе и неопределяемые математические понятия: множество, элемент, сомножество, ноль, единица, число, нечисловое свойство, тождество, отношение, функция, математическая непрерывность, истина, логическая связка и операция, переменная, неопределенность, имя (обозначение) и смысл понятия, многие другие математические понятия, отраженные в естественном языке, которыми оперирует естественный математический интеллект.

Структурный и ролевой аспекты описания математической модели формализуются на разных этапах анализа-синтеза, поэтому первичные системологические понятия образуют два взаимосвязанных базиса – структурный *POCKIRT* и ролевой *fsr* базисы, позволяющие формально описать многие шаги анализа и синтеза систем и процессов в них, выделение, разграничение, изоляцию фрагментов материальной и идеальной реальности, определить связи и места взаимодействия компонентов, их композицию, состояния объектов и средства отождествления состояний. Однако для описания математических объектов и процессов в информационной среде искусственного интеллекта недостаточно системологических понятий структурного и ролевого базисов. Более полную формализацию математической семантики обеспечивают семиотический базис ПИКАД, используя который, можно описать структуру математических понятий, их семантических связей, и проблемологический базис *ABCDEFΓS*, позволяющий формально определить целевую ориентацию и критерии математических систем и иерархий процессов в них [4].

Неформализованный математический субъект фактически использует первичные понятия теоретической информатики на интуитивном уровне, неявно привлекая понятие оболочки как средство разграничения, выделения знаковых структур и процессов, понятия узла – места сопряжения математических объектов и формул, узы, отождествляющей значения переменных и т. д. Всякий математический объект в информационной семантике представляется полюсником с фиксированной ролью и абстрактной семантикой в составе математической модели. Так, множество есть нуль-полюсник, в оболочке которого находятся несвязанные различимые элементы, представленные однополюсниками – это дент понятия множества, а контом являются функция принадлежности и функция различимости и идентификации элементов, а также набор свойств и связей множества с другими множествами. Понятие единицы есть нульполюсник – это дент, а контом понятия будет набор свойств и связей единицы с другими числами в целой и вещественной арифметике и алгебре; теоретико-множественные модели чисел, предложенные Нейманом и Цермело и построенные только из оболочек, см. в [4].

Единица есть текущий знак процесса счета элементов сомножества или шагов математического процесса, а также начальный знак их нумерации (именования) и упорядочения. Натуральный нуль есть мощность пустого сомножества и начальный знак счета объектов системы, так как счет всегда начинается с нуля, а нумерация – с единицы, например, для пустого сомножества счет и заканчивается нулем, а нумерация элементов просто не начинается. Натуральное число есть знак на выходе специального *f*-объекта в составе системы искусственного интеллекта – счетчика при первичном конструктивном определении этого понятия, из этого определения получают дескриптивные определения натурального числа и натурального ряда, в частности, их аксиоматики.

Исключение первичной системной семантики из контов и дентов, порожденных абстракцией математических объектов, приводит к смысловым несуразицам и непомерным усложнениям абстрактных структур, например, в формализме Бурбаки определение единицы "является знакосочетанием из нескольких десятков тысяч" семи исходных знаков [13] (задолго до Бурбаки родоначальник логицизма Пеано определял 1 посредством 27 уравнений [18]), кроме того, в традиционных определениях простейшее число единица не является простым числом, а нуль – натуральным (министр образования Франции издал указ "считать [натуральный] нуль натуральным числом"). В теоретико-информационном аспекте все неопределяемые математические понятия, якобы доопределяемые системой аксиом и очищенные от предметной семантики, – это наиболее тщательно и полно определенные семиотические конструкции, включенные в интуицию естественного интеллекта либо материализованные в программно-аппаратных средствах искусственного интеллекта.

Данное замечание относится ко всем исходным понятиям математики, перечисленным выше, информационные определения большинства из них даны в [4].

Существенное свойство объективированных определений математических объектов и процессов в четырех базисах теоретической информатики – это возможность их материализации вне естественного языка и мышления, задавая имена, адреса, конты и денты понятий в искусственной информационной среде и увязывая их с естественным математическим интеллектом посредством функций именования и адресации, а функции контирования и дентирования понятий в принципе объективируемы и позволяют уточнить интуицию и семантику объектов и процессов естественного математического мышления, что, в частности, разрывает порочный круг многих естественно-языковых определений, на чем настаивал Пуанкаре, скажем, при логистическом определении понятия единицы [18].

4. Информационные основания логики

Вполне аналогичная картина повторяется в основаниях логики [1,12,14,15]. В чистой математике неопределяемые логические понятия считаются интуитивно очевидными, в информационных основаниях математики эти понятия имеют однозначные определения, согласованные с научной традицией и межпредметной семантикой, они точно воспроизводимы в виде информационных объектов программно-аппаратных средств знаковых систем, а следовательно, и в процессах мышления естественного интеллекта. Информационная семантика основных логических понятий была изложена в [4], см. также [25, 26], поэтому здесь мы остановимся лишь на принципиальных вопросах информационных оснований математической логики.

Понятие истины в чистой математике, классической и конструктивной, формально не определяется, ограничиваясь ссылкой на интуитивную очевидность. Многие математики относят это понятие к философии, а не к общенаучным междисциплинарным терминам. А. Тарский [27], Р. Карнап [28], К. И. Льюис [29] и др. строили формальные определения логической и фактической истинности, свободные, по их мнению, от семантических парадоксов прежде всего вследствие разделения языка-объекта и метаязыка, однако эти формальные построения конструировались в неформализованной естественно-языковой среде с неопределенными внелогическими связями базисных понятий логики. Если интуиционисты считают основным критерием истинности самоочевидность и интуитивную убедительность результата мышления, а также принципиальную возможность построить мысленный математический эксперимент (по этой причине они отвергают теоретико-множественный и, следовательно, системный подход к определению математических понятий, а также закон исключенного третьего в бесконечных множествах), то классические математики нередко истинность заменяют формальными конструкциями выводимости, реализуемости, разрешимости, доказуемости, вовсе не похожими на формальное описание соответствия либо несоответствия информационного объекта идеалу, который интеллект принимает за истину.

Кризис математических оснований и поиск путей выхода из него привел к комбинаторному росту в математике семантических значений базисных логических понятий и числа аксиоматик логических систем. Представитель классической математики Х. Карри приводит шесть определений логической операции отрицания [14], приверженец конструктивизма А. А. Марков выделяет еще три определения [30], и все они выражают весьма различную семантику логического отрицания. Такое же, если не большее, смысловое разнообразие формализаций имеет импликация – логическое следование "если… то…" [6, 12, 13, 15, 30].

В логике классической математики логические операции определяются функционально посредством таблиц истинности, т. е. соответствия двоичных аргументов и результатов, которое описывает логическую семантику операции независимо от семантики других операций, но в результате формализации оказалось, что логические связки функционально зависимы между собой и для определения любой логической связи произвольной арности достаточно одной операции, но чаще используют три булевы логические операции. В интуиционистской логике операции определяются системой аксиом исчисления высказываний и предикатов, в которой закон исключенного третьего или эквивалентный ему закон снятия двойного отрицания заменяется более слабым принципом противоречия, в результате логические связки оказываются независимыми и не представимыми, как показал К. Гёдель, не только в двузначной, но и в конечнозначной логике. Смысл подобных построений, слишком далеких от интуитивной самоочевидности, состоит в попытках охватить бесконечные множества математических объектов, однако понятие бесконечности в современных формализациях является в общем случае противоречивым и недоопределенным, см. далее, а также [4, 31].

При конструировании в интеллектной системе информационной семантики классической двоичной логики и неклассических многозначных логик – трилогики, тетралогики, частотной логики – все логические понятия и операции определяются своими контами, дентами и материализуются в виде *fsr*-объектов, например, классы математических объектов, заданные дентами – множествами, определяются в базисе алгебры Кантора ($\cap$, $\cup$, |), а заданные контами – свойствами классов в виде функций принадлежности определяются в базисе Буля ($\vee$, $\wedge$,–). Логические операции представляются *f*-объектами, логические связки и отношения – в виде *r*-объектов, при этом дентом логической операции (а не ее входных объектов и результата) служит сам *f*-объект, преобразователь двоичных переменных и их истинностей, конт операции составляет набор свойств операции и связей с другими операциями, логическими связками и т. д. Реализация объективированной информационно-логической семантики предполагает выполнение фундаментального принципа информатики о **конечности** числа ситуаций в материально-информационном универсуме *U* и их свойств, которые может постичь, описать, преобразовать любая система, следовательно, наиболее простые, ясные и очевидные классические определения логических понятий, операций и отношений остаются незыблемыми в объективированной информационной семантике искусственного интеллекта. Из этих определений автоматически следуют все законы классической логики, в частности, закон исключенного третьего есть простое отрицание закона противоречия: $-(a \cdot \bar{a}) = a + \bar{a} = 1$ в базисе Буля – Кантора. В схеме косвенного обращения конструктивно и дескриптивно определяются фактическая (аристотелева, экспериментальная) и логическая (лейбницева, теоретическая) истинность, согласованная с внелогическими межпредметными понятиями адекватности, точности, достоверности, неотъемлемо присущие математике, физике, метрологии и другим естественным и техническим наукам [4].

5. Информационная семантика математических бесконечностей

Принципы конечности, открытости (незамкнутости) материально-информационного мира, ограниченности информационных возможностей естественного и искусственного интеллекта и любых мыслимых информационных систем более адекватно и реалистично описывают проблемные ситуации, в том числе и в математике, чем абстрактные математические модели, допускающие бесконечности в большом и малом (по этой причине математику 20 века называют иногда наукой о бесконечности). В информационной семантике конечность систем, объектов, процессов и их остаточной неопределенности согласуется с конструктивно определенными потенциальными математическими бесконечностями следующим образом: абстрагирование от различимости математических объектов по их свойствам позволяет описать в контовой семантике неограниченно большие и предельно малые характеристики объектов, не чувствительные к изменениям величин: $x >$ ω$_x$ либо $|x - x_0| <$ Ɔ$_x$ за границами дентовой достижимости в большом ω и в малом Ɔ.

Если некоторое количественное свойство *a(x)* системы или процесса в ней не зависит от численности каких-либо ее компонентов или иной числовой характеристики *x*, а также если изменения значения *a* становятся меньше конечного порога различимости Ɔ$_a$ средствами искусственного интеллекта при неограниченном увеличении *x*, то допустима замена достижимости ω бесконечностью ∞, в противном случае, при сохранении различимости, скажем, *a*(ω) ≠ *a*(2 ω), противоречивый шаг ω→∞ недопустим. Аналогично поступают в математическом анализе, оперируя бесконечно малыми: замена машинного вещественного нуля Ͻ дентово неопределенным вещественным нулем 0 допустима (в правилах Лопиталя, в нестандартном анализе [32]), если $|a(x+\text{Ͻ}_x)-a(x)|<\text{Ͻ}_a$, а в общем случае вещественный нуль – это противоречивое понятие, как и понятие актуальной бесконечности, гораздо более сложное понятие, чем натуральный нуль, возникающее в потенциально либо актуально бесконечных неопределенных моделях континуума и математической непрерывности, принципиально непредставимое в дентовой и конструктивно представимое в частных моделях контовой семантики принципиально различными конечными определениями.

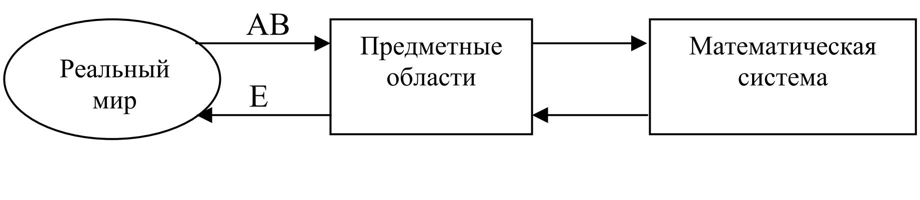
В информационных основаниях математики, материализуемых в интеллектных системах в виде программно-аппаратных средств, выполняются все аксиомы конечной математики, включая аксиому Евклида “целое больше части”, аксиому выбора Цермело, при этом актуальная бесконечность ∞_a и сверхконечные числа – трансфиниты - отвергаются как неконструктивные объекты, обладающие в контовой семантике бесконечной, принципиально неустранимой неопределенностью, отвергаются также беззаконные свободно становящиеся последовательности интуиционизма [8, 11].

Конструктивно определенная **потенциальная бесконечность** $\infty_П \geq \omega$ в большом и в малом $\text{Ͻ}=\frac{1}{\omega}$ есть **конечный**, а не бесконечный, математический объект, **постоянный** (предельно большая величина в данной предметике или гиперчисло, скажем, $10^{10^{10}}$) либо **переменный объект**, строго меньший недостижимой актуальной бесконечности $\infty_n<\infty_a$, $0<\frac{1}{\infty_n}\leq\text{Ͻ}$, возрастание и неопределенность которого контролируются в контовой или дентовой (при $\infty_n=\omega$) семантике неразличимостью изменений свойств $a(\infty_n)$ проблемной системы при увеличении $\infty_П$ либо ограничивается сверху пределами адекватности моделей предметики, поэтому $\infty_n+\infty_n\neq\infty_n$. Математические патологии типа теоремы Банаха – Тарского устраняются конструктивным путем, так, в этой теореме необходимо ввести конструктивное определение понятия шара в конструктивном континууме и его конечного разбиения, в такой модели $\infty\neq\infty+\infty$.

6. Математика как система

Итак, информационные основания математики и логики, реализуемые в искусственной информационной среде, вводят естественные ограничения математических абстракций и модели их неопределенностей, открывают возможности изменить традиционные приоритеты математики в пользу предельно конструктивного направления – конечной математики - **финитики** и отказа от неконструктивных определений потенциальной и актуальной бесконечности.

Математика, как и все науки, по форме и содержанию своих процессов эволюции вполне подобна биологическим системам или промышленному производству, но удовлетворяет иные устремления и потребности социальной системы. Математика как информационная система, язык, технология тесно связана с другими разделами науки, давление которых заставляет через их семантику изменять воображаемые математические миры, повышать целесообразность и эффективность математических исследований. Открытая математическая система в базисе *POCKIRT* представляется иерархическим полюсником с внутренними подсистемами-полюсниками, взаимодействующими между собой и с внешними системами посредством теорий предметных областей, а через их сеноры A, рефоры B, эффекторы E – с материально-информационной действительностью:



В ролевом *fsr*-базисе математическая система и ее компоненты наделяются функциями и процедурной семантикой, связями и реляционной семантикой, свойствами, состояниями и статусной семантикой количественных и качественных параметрических описаний математических объектов и процессов, а также моделями их неопределенностей. В семиотическом базисе математические объекты и процессы выражены своими контами, дентами, именами, адресами и связями между ними. В проблемологическом базисе определяются целевая ориентация, средства достижения целей в виде процессоров, методов и технологий, объективные критерии эффективности математических процессов и их результатов: сложности-простоты, точности-обоснованности, оперативности, компактности, универсальности, а также модели субъективных пока еще плохо формализованных критериев красоты, изящества и других эстетических критериев математического творчества. Если физика занимается поиском предельно общих механизмов взаимодействия материальных элементов произвольной природы, то математика ищет общезначимые формулы и правила знаковых преобразований в аспекте их абсолютной истинности и достоверности, а информатика занимается поиском фундаментальных принципов и преобразований знаний в аспекте их полноты и эффективности: ценности, адекватности, оперативности, компактности и т. д.

Идеалом математики служат предельные абстракции, порождаемые строгими методами, идеалом информационного подхода является предельная эффективность, системная полнота описания и достижимая адекватность формализации и интерпретации формализмов. Математика начинается с содержательной модели проблемной системы и набора положений об истинности исходной информации, поставляемой предметикой, поэтому все последующие математические результаты обладают **условной истинностью**, верной при истинности исходных гипотез. Информатика начинается с построения вместе с теорией предметики моделей проблемной системы, информационных моделей источников и потребителей ожидаемых новых знаний, оценок достоверности фактической и модельной информации, целей и критериев, последствий принимаемых решений.

Отсутствие этих данных при формулировках математических задач вынуждает привлекать их в качестве недоказанных гипотез и постулировать их истинность. Б. Рассел замечал по этому поводу: “Метод постулирования имеет много преимуществ, совпадающих с теми, которые присущи воровству, по сравнению с честным трудом”. Сходные мысли высказывал Л. Бриллюэн, критикуя “чудодейственные” фразы типа “исходя из точных математических расчетов…”, “научно доказано, что…”, призывающие верить без всяких возражений. Он писал: “Наука не вероучение…, наука есть плод человеческого ума и активной деятельности, она открыта для пересмотра своих относительных истин, основанных на логике – типичном продукте человеческого разума” [33]. Природа естественного математического мышления тесно связана с чувственной интерпретацией идей числа, величины, фигуры или зависимости, скажем, функции как преобразователя некоторого определенного типа предметов. Центральной проблемой поисков адекватных моделей механизмов математического и естественно-научного мышления является построение формализованной и унифицированной материально-информационной семантики любой предметики, по крайней мере, в четырех базисах теоретической информатики, в которых определяется и расширенная базисная семантика оснований математики.

Отсутствие соответствующих расширений в современных основаниях логики-математики серьезно тормозит процесс решения фундаментальной проблемы создания искусственного математического интеллекта и объективированной базы накопленных математических знаний и умений в виде семиотических сетей, семантических моделей математических дисциплин, машинных таблиц интегралов, рядов, произведений, теорем, алгоритмов и метаалгоритмов дискретной и непрерывной (числовой и геометрической) математики. Для успешного продвижения в разрешении узловых вопросов этой проблемы в информационные основания математики необходимо включить базисные понятия формализованных неопределенностей – индефиниций логических и математических объектов, так как при описании и моделировании реальных принципиально открытых материально-информационных систем более адекватным действительности будет мышление, оперирующее размытыми моделями (примером этому служит квантовая физика), включить также понятия взаимодействующих математических подсистем и их базисного пространственно-временного вместилища, от которого абстракцией производятся виртуальные **математические пространства** и **математическое время**, лежащее в основе определения понятия математического процесса, этим достигается “симметрия” описаний семантики материальных и математических (знаковых) явлений.

Важным условием успеха в решении названной проблемы является создание семиотических моделей порождения и преобразования контовой иерархии абстракций и дентовой иерархии обобщений [4], такие модели позволят воспроизвести в искусственной среде основные механизмы естественного математического мышления, построить алгоритмы функционального и критериального управления конкретной и абстрактной семантикой математических объектов и процессов постановки и разрешения математических проблем и тем самым устранить очевидные пороки современного аксиоматического подхода с его требованием полной абстракции от смысла знаковых структур и облегченной манипуляцией чистыми символами.

Построению моделей эффективного управления механизмами математического мышления и передаче искусственному интеллекту хотя бы части управляющих функций предшествует создание иерархии **обратимых абстракций**, в которых сохраняются связи с отброшенными при абстрагировании компонентами описаний и преобразований математических моделей, обеспечивающих возврат к исходным конструкциям без потерь информации, если возникают тупиковые ситуации либо необходимость в интерпретации формальных структур и т. п. Х. Д. Штейнхаус по этому случаю выразился так: “Из дома реальности легко забрести в лес математики, но лишь немногие способны вернуться обратно”.

В пограничных областях **объективной реалистической** математики в процессе ее развития возникают абстрактные фикции – объекты **фантастической** математики в субъективных основаниях, не подкрепленные конкретной семантикой естественно-научных предметик. Девятнадцатый век породил много неожиданных фантомов и “математических чудовищ”. А. Пуанкаре спрашивал себя: “Как интуиция может обмануть нас до такой степени?”, а Ш. Эрмит, анализируя построенные Больцано и Дедекиндом патологические функции, заявил, что он “с ужасом отворачивается от внушающей сожаление язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производной” [23]. К фантомам следует отнести и трансфиниты Кантора – сверхконечные числа $\omega \geq \infty_a$. Кантор полагал, что $\omega + 1 \neq 1 + \omega$, но в последующем “арифметика и алгебра” трансфинитов, ординальных и кардинальных чисел, была максимально приближена последователями к свойствам конечных объектов и процессов [34], а также были высказаны надежды на последующее развитие математической интуиции о недостижимых и измеримых кардиналах, а пока, по мнению П. Коэна, “мы должны повернуть от научных программ к инстинктивному уровню” [35]. С позиций информационной семантики эти надежды беспочвенны.

Рядом с математическими фантомами, монстрами и патологиями живет религиозное математическое мышление и часто возникает сакрализация веры в незыблемость классических оснований, всесильность абстрактного аксиоматического подхода, веры, освященной непререкаемым авторитетом великих предшественников. Догматы математической веры препятствуют углублению математических исследований, расширению сфер их применимости, ожидаемому серьезному упрощению языка чистой математики, в значительной степени недоступному специалистам-нематематикам. Информационная семантика как раз и призвана упростить математический язык, согласовать его на содержательном уровне с языками других предметик. В качестве примера упрощения математических структур приведем теорему Гёделя о неполноте формальных систем, смысл и доказательство которой в классических основаниях весьма сложны для восприятия, а в информационных основаниях неполнота сложной формальной системы есть элементарное следствие фундаментального закона информационной ограниченности любой знаковой системы.

Заключение

Формализованная информационная семантика новых оснований чистой и прикладной математики обещает открытие новых возможностей строгих математических методов, в частности, при описании реальных неопределенных ситуаций, создании моделей искусственного интеллекта, новых средств формализации и интерпретации в едином здании науки. Особую роль информационная семантика должна сыграть в преподавании математики школьникам, студентам-математикам и особенно нематематикам. С появлением новых средств формализации и интерпретации, новых информационных и математических технологий возникает естественная потребность изменить основания математики, ввести разные базисы в зависимости от целей и возможностей реализации абстракций и обобщений, объектированного управления ими в разных языковых средах и парадигмах. Выбор базиса, исходных принципов и оснований в конечном итоге определяет эффективность функционирования материальной или знаковой, в данном случае математической системы.

Список литературы

1. *Гильберт Д.* Избранные труды. Т. I. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. – М.: Факториал, 1998. – 575 с.
2. *Мизес Р.* фон. Математические постулаты и человеческое мышление // Очерки о математике.–М.: Знание, 1973. – С 3-43. (The World of Mathematics, London, George Allen and Unwin Ltd, 1960).
3. *Дьёдонне Ж.* Дело Никола Бурбаки// Очерки о математике. – М.: Знание, 1973. – С 44-55. (The American mathem. Monthly. 77, 1970, №2, PP 134-145).
4. *Зверев Г.Н.* Основания теоретической информатики. Разд. 1-10. – Уфа: УГАТУ, 1995-2001.
5. *Арнольд В.И.* Избранное. - М.: Фазис, 1997. – 768 с.
6. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики: логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1979. – 677 с.
7. *Вейль Г.* Математическое мышление. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
8. *Гейтинг А.* Интуиционизм. Введение. – М.: Наука, 1965. – 200 с.
9. *Марков А.А.* О конструктивной математике / Тр. МИАН СССР. 67. 1962. – С. 7-14.
10. *Мартин-Лёф П.* Очерки по конструктивной математике. – М.:Мир, 1975. – 136 с.
11. *Трулстра А.С.* Аспекты конструктивной математики // Справочная книга по математической логике. Ч. IV Теория доказательств и конструктивная математика. – М.: Наука, 1983. – С. 160-240.
12. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. – М.: ИЛ, 1957. – 526 с.
13. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1963. – 455 с.
14. *Карри Х.* Основания математической логики. – М.:Мир, 1969. – 568 с.
15. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. – М.: ИЛ, 1960. – 485 с.
16. *Голдблатт Р.*Топосы. Категорный анализ логики. – М.: Мир, 1983. – 488 с.
17. *Арнольд В.И.* Международный математический конгресс в Берлине. // Вестник РАН. Т. 69, №2, 1999. – С. 163-174.
18. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1990. – 736 с.
19. *Гильберт Г.* Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – 491 с.
20. *Вейль Г.* О философии математики. – М.: ГТТИ, 1934. – 177 с.
21. *Bourbaki N.* L'Architekture des mathematiques / Les grands courante de la pense mathematiques, 1948, PP. 35-47; русский текст: Архитектура математики / Матем. Просвещение, вып. 5. – М.: ГИФМЛ, 1960. – С.99-112.

22. *Bourbaki N.* Foundation of Mathematics for Working Mathematician //The Jornal of Simbolic Logic, 1949.
23. *Бурбаки Н*. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963. – 292 с.
24. *Thom R.* “Modern” mathematics: an educational and philosophic error? // American scientist, Nov.-Dec., 1971, pp. 695-699.
25. *Зверев Г.Н.* Частотная логика – альтернатива классической логике в новых информационных технологиях. // «Информационные технологии» 1998, №11. – С. 2-10.
26. *Зверев Г.Н.* Объективные многозначные логики в интеллектуальных системах моделирования и обработки информации // Вестник УГАТУ. Т. 4. №1. – Уфа: УГАТУ, 2003. – С. 20-34.
27. *Tarski A.* Logic, semantics, and metamatimatics. – Oxford, 1955.
28. *Карнап Р.* Значение и необходимость. Исследование по семантике и модельной логике. – М.: ИЛ, 1959. – 382 с.
29. *Lewis C.I.* The modes of meaning, “Phil. And Phenom. Res.,” 4, 1944, p. 236-250.
30. *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. // Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика и механика, 1970, №2. – С. 7-29.
31. *Колмогоров А.Н.* Бесконечность / Математическая энциклопедия. Т.1. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – С. 455 – 458.
32. *Энгелер Э.* Метаматематика элементарной математики. – М.: Мир, 1987. – 129 с.
33. *Бриллюэн Л.* Научная неопределенность и информация. – М.: Мир, 1966. – 271 с.
34. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. – М.:Мир, 1970. – 416 с.
35. *Коэн П. Дж.* Об основаниях теории множеств. // УМН. Т. XXIX, вып. 5 (179), сент.-окт. 1974. – С. 169-176.