УДК 519:681.5

Г. Н. Зверев, доктор технических наук
Уфимский государственный авиационный технический университет

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИК В СИСТЕМАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ*

[Журн."Информационные технологии" № 12, 1999.– С. 12–19]

В статье даны оценки точности логических функций от искаженных аргументов, методы анализа преобразований ошибок в логических сетях и процессах принятия решений. Подход основан на аппарате частотной логики в базисе дифференциальной двоичной алгебры, что позволяет построить быстрые алгоритмы интеграционного дискретного моделирования.Приводятся формулы границ применимости классической, нечёткой и других неклассических логик с адекватной семантикой.

Одна из проблем создания эффективных технологий моделирования и анализа-синтеза сложных технических и организационных систем состоит в достижении удовлетворительной адекватности моделей при сохранении приемлемой сложности, реализуемости и оперативности процессов получения решений. С ростом числа существенных факторов, влияющих на состояние моделируемой системы, которая характеризуется количественными (числовыми) и качественными (нечисловыми) свойствами и признаками, далеко не всегда удаётся достичь компромисса между требуемой точностью, достоверностью решения и оперативностью в реальном и даже в модельном времени.

Необходимое время синтеза оптимального или субоптимального решения можно сократить не только путём упрощения моделей, неизбежно приводящего к потере точности, но и заменой **имитационного** (детального) моделирования системы и синтезируемого решения в каждой информационной ситуации на **интеграционное моделирование** в классе ситуаций, при котором по свойствам класса и моделям объектов системы сразу получают сводные характеристики системы и её объектов в ожидаемом сомножестве ситуаций.

Интеграционное моделирование нашло применение в анализе-синтезе количественных моделей систем и процессов, в частности, в стохастической теории управления, однако для дискретных и дискретно-непрерывных моделей ситуаций, в которые входят нечисловые, качественные признаки, основным подходом остается имитационное моделирование каждой ситуации, приводящее для класса ситуаций и класса альтернативных систем и решений к непреодолимому “комбинаторному взрыву” задач структурного и структурно-параметрического синтеза, решаемых традиционными логическими и дискретно-логическими методами переборного типа.

Данное сообщение является продолжением статей [1,2] и имеет целью привлечь внимание разработчиков экспертных систем, дискретных моделей и систем поддержки принятия решений к новым методам решения дискретно-

* Работа поддержана грантом Минобразования в области информатики и кибернетики 1998,99гг

логических задач, развитым в последние два десятилетия. Эти методы позволяют построить быстрые алгоритмы интеграционного моделирования, по априорным распределениям логических признаков вычислить точности и погрешности логических аппроксимаций в заданных классах ситуаций, решающим образом снизить переборную NP-сложность задач дискретной оптимизации. Здесь мы ограничимся разбором простейших задач сравнительного анализа точности классической и неклассических логик, используя аппарат частотной логики.

Лица, принимающие решение (исследователь, проектировщик, управленец), автоматизированные системы моделирования принятия решений оперируют фактическими и априорными, экспериментальными и теоретическими данными, которые могут в той или иной степени искажаться. Для упрощения постановки задачи переведем все числовые и нечисловые данные z в форму двоичных векторов $z = (z_1, z_2, ..., z_k)$, где k - число дискретов, значность шкалы z, а двоичный вектор z имеет один из компонентов единичным, $z_i = 1$, остальные компоненты вектора z равны нулю, $1 \le i \le k$, при этом ненулевое двоичное значение соответствует присвоенному значению числового либо нечислового параметра $-$ одно из k возможных значений. Наличие искажений приводит к тому, что истинное значение 1 превращается в ноль, а какой-либо ноль превращается в единицу.

При классическом подходе из всех $z-$двоичных наборов свойств моделируемых ситуаций выбирают значимые двоичные признаки, которые отражают заданный аспект моделирования, образуют из них исходный двоичный вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ размерности $n \ge 1$ и составляют различные логические функции, описывающие связи и преобразования свойств и состояний моделируемой системы.

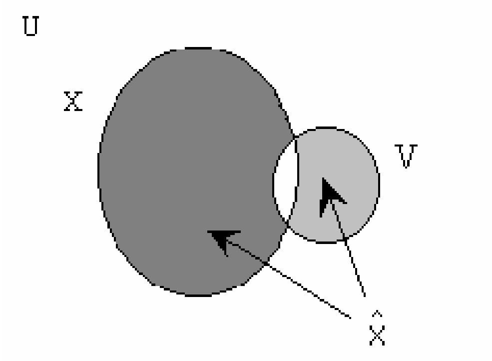
Обозначим некоторую логическую функцию от истинных значений логических переменных и ее результат через $y = f(x)$, а искаженный результат, полученный по той же функции f, но по исходным данным $\widehat{\boldsymbol{x}} = (\widehat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}})$, отягощенным ошибками наблюдений, вычислений, рассуждений, обозначим через $\widehat{y} = f(\widehat{x})$.

Логические функции f и их семантика выражаются через унарную и бинарные логические операции и отношения между двоичными признаками *a* и *b* : $\overline{a}$ – отрицание (негация), $a + b$ – логическая сумма (дизъюнкция), $a \cdot b$ – логическое произведение (конъюнкция), $a - b$ – логическая разность, $a \to b$ – импликация (если *a*, то *b*) $a \leftrightarrow b$ – эквиваленция (равенство), $a \oplus b$ – дифференция (различитель, разделительное ИЛИ, антиэквиваленция, неравенство $a \ne b$ или сумма по модулю 2), $a|b$ – штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, “*a* и *b* не совместимы”), $a \downarrow b$ – стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции, “ ни *a*, ни *b*”). Кроме этого в логике используются *n*-арные коммутативные и ассоциативные операции, не зависящие от порядка их выполнения: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$ – логическая сумма *n* переменных, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ – логическое произведение, $\bigoplus_{i=1}^{n} a_i = a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$ –

попарная дифференция n-переменных, попарный различитель, модульная сумма n признаков. Эти операции записываются без скобок. Последняя операция менее распространена в приложениях, чем дизъюнкция и конъюнкция, ее свойства приводятся ниже.

Абсолютная истинность классической логики: Истина = 1 и Ложь = 0 исходных признаков и логических формул заменяется в частотной логике частостью $q = \frac{N_1}{N}$ истинных или редкостью $\bar{q} = 1 - q = \frac{N_0}{N}$ ложных значений логического выражения в универсуме U ожидаемых ситуаций, в которых будет работать моделируемая система. Объём универсума есть $|U| = N = N_0 + N_1$ – общее число ситуаций, N_0, N_1 – число ситуаций, в которых логическое выражение принимает значения 0 и 1, “ложь” и “истина”, а частотная истинность выражает долю объёма универсума или процент истинных выражений: $0 \le q \le 1$ или 100%.

Пусть на универсуме U задан двоичный признак x и двоичный признак v его искажений: при ошибке $\mathrm{v} = 0$ фактическое значение $\hat{x}$ совпадает с его истинным значением: $\hat{x} = x$, а при ненулевой ошибке $\mathrm{v} = 1$, оценка $\hat{x}$ свойства x принимает противоположное значение $\hat{x} = \bar{x}$. Изобразим эту зависимость диаграммой Эйлера, на которой внутри кругов расположены ситуации $x = 1$, $\mathrm{v} = 1$, а вне кругов $x = 0$ и $\mathrm{v} = 0$.



Ошибки наблюдений внутри круга v разделяются на два сорта: $\mathrm{v} = \mathrm{v}x + \mathrm{v}\bar{x} = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1 \oplus \mathrm{v}_2$, $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}x$ – ошибка первого рода, которая называется “пропуск цели” и возникает при переходе $x = 1 \to \hat{x} = 0$, $\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}\bar{x}$ – ошибка второго рода – “ложная цель” или “ложная тревога”, возникающая при переходе $x = 0 \to \hat{x} = 1$, тогда множеству объектов с оценкой $\hat{x} = 1$ соответствует два заштрихованных сегмента $\hat{x} = x\bar{\mathrm{v}} + \bar{x}\mathrm{v}$, вне которых $\hat{x} = x\mathrm{v} + \bar{x}\bar{\mathrm{v}} = 0$.

Обозначим относительные объемы признаков – их частотные истинности подчеркиванием: $\underline{x} = \underline{x\bar{\mathrm{v}}} + \underline{x\mathrm{v}} = \frac{N_x}{N}$, $\underline{\bar{x}} = 1 - \underline{x} = \underline{\bar{x}\mathrm{v}} + \underline{\bar{x}\bar{\mathrm{v}}} = \frac{N_{\bar{x}}}{N}$, $\underline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_2$ либо угловыми скобками $\lfloor f(x) \rfloor = \underline{f}(x) = \frac{N_f}{N}$, где N_f – число информационных ситуаций, в которых функция истинна, $f(x) = 1$. Объем $\underline{\mathrm{v}}$ определяет количественно средний уровень искажений исходных данных $\hat{x}$ в полном объеме универсума и характеризует абсолютную ошибку источника информации, скажем, $\underline{\mathrm{v}} = 0.05 = 5\%$ искаженных значений $\hat{x} \ne x, \underline{\mathrm{v}}_1 = \underline{\mathrm{v}x} = 0.03$, $\underline{\mathrm{v}}_2 = \underline{\mathrm{v}\bar{x}} = 0.02$. В общем случае помехи наблюдений, как и в количественных моделях, имеют систематические и случайные составляющие.

Рассмотрим два крайних случая: 1) объемы равны, $\underline{\mathrm{v}}_1 = \underline{\mathrm{v}}_2$, и 2) один из объемов, например, $\underline{\mathrm{v}}_1 = 0, \underline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{v}}_2$. Если объемы равны, то ошибка конкретного искаженного наблюдения может быть с равным основанием либо первого либо второго рода, а во втором случае происходит систематическое увеличение объема $\hat{x}$ на величину $\underline{\mathrm{v}}_2$. Систематическая ошибка возникает когда число ошибок потерь цели $1 \to 0$ отличается от числа появления ложных целей $0 \to 1$. Определим **систематическую ошибку** наблюдений (вычислений, рассуждений) как разность $\mathrm{v}_0 = \underline{\mathrm{v}}_2 - \underline{\mathrm{v}}_1$, которая выражает увеличение при $\mathrm{v}_0 > 0$ объема $\hat{x} = 1$ над объемом $x = 1$ (в нашем примере $\mathrm{v}_0 = -0.01$ – уменьшение объема $\hat{x}$ на 1% в сравнении с $\underline{x}$).

Систематическая ошибка изменяется в пределах $-\underline{\mathrm{v}} \le \mathrm{v}_0 \le \underline{\mathrm{v}}$, а ее относительная мера $\delta_0 = \dfrac{\mathrm{v}_0}{\underline{\mathrm{v}}}$ лежит в интервале $-1 \le \delta_0 \le 1$. Предельным значениям систематической ошибки $\mathrm{v}_0 = \pm\underline{\mathrm{v}}$ соответствует логическая зависимость между признаками x и v – вложенность круга v в x или $\bar{x}$, и наличие ошибок только одного рода.

Случайная составляющая ошибок наблюдений v_c определяется как минимальная ошибка из двух возможных видов: $\mathrm{v}_c = \min(\underline{\mathrm{v}}_1, \underline{\mathrm{v}}_2)$ и если из максимальной ошибки вычесть модуль систематической, то остается чисто случайная ошибка, иными словами, сумма случайной и модуля систематической составляющих равна максимальной ошибке из двух возможных видов ошибок: $\max(\underline{\mathrm{v}}_1, \underline{\mathrm{v}}_2) = \mathrm{v}_c + /\mathrm{v}_0/$, а полная ошибка равна их сумме $\underline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_2 = (\max + \min)(\underline{\mathrm{v}}_1, \underline{\mathrm{v}}_2)$. Случайная ошибка изменяется в интервале: $0 \le \mathrm{v}_c \le \frac{1}{2}\underline{\mathrm{v}}$.

Относительные ошибки – полная, случайная, систематическая, первого и второго рода определяются в виде отношения объема ошибки к объему цели x либо ее отрицания $\bar{x}$, например, полная относительная ошибка $\delta_x = \dfrac{\mathrm{v}}{\underline{x}}$. В обратных задачах диагностики вместо объема неизвестного x ставят в знаменатель объем известного признака $\hat{x}$, такие оценки называются **соотносительными ошибками**. Относительные и соотносительные ошибки равны условным частостям, вероятностям, например, относительная ошибка первого рода $\delta_{x1} = \dfrac{\underline{\mathrm{v}}_1}{\underline{x}} = q(\mathrm{v} = 1 | x = 1)$.

Между тремя признаками $x, \mathrm{v}, \hat{x}$ существуют простые связи: $\hat{x} = x \oplus \mathrm{v},\ x = \hat{x} \oplus \mathrm{v},\ \mathrm{v} = \hat{x} \oplus x$. Если бы эти признаки были количественными параметрами ситуации, то в обычной числовой арифметике мы имели бы соотношения: $\hat{x} = x + \mathrm{v},\ x = \hat{x} - \mathrm{v},\ \mathrm{v} = \hat{x} - x$ – стандартное определение погрешности или помехи измерения - вычисления. В двоичной арифметике эти операции сложения и вычитания признаков становятся неразличимыми и заменяются на дифференцию $\oplus$.

Широко распространенной формой представления логических функций является двоичный полином $\sum\limits_i \prod\limits_j$ – сумма произведений логических признаков или их отрицаний, это дизъюнктивная форма в базисе Буля $\{+, \cdot, -\}$, которой соответствует булева алгебра. Частотная логика в булевом базисе изложена в [1,3]. Реже используется алгебра Жегалкина в базисе $\{\oplus,\cdot,1\}$. Для анализа точности логических аппроксимаций более удобна форма логических функций в **дифференциальном базисе** $\{\oplus,\cdot,\ -\}$, содержащем дифференцию, конъюнкцию, негацию, который получается из булева базиса заменой дизъюнкции – логического сложения + на модульное сложение – дифференцию $\oplus$.В этом базисе логические функции представляются дифференциальными полиномами $\bigoplus\limits_i \prod\limits_j$ – модульными суммами логических произведений, к которым применимы все законы классической логики и преобразования форм, составляющие **дифференциальную двоичную алгебру** с коммутативными и ассоциативными бинарными операциями : $a \cdot b, a \oplus b$ и логическими законами: исключенного третьего $a \oplus \bar{a} = 1$, противоречия $a \cdot \bar{a} = a \oplus a = 0$, законы двойного отрицания $\bar{\bar{a}} = a$, $\bar{a} \oplus \bar{b} = a \oplus b$, поглощения переменных и операций $a \cdot a = a$, $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot 1 = a$, $a \oplus 0 = a$, $a \oplus 1 = \bar{a}$, $a \oplus ab = a\bar{b}$, де Моргана $\overline{a \oplus b} = a \oplus \bar{b} = \bar{a} \oplus b$, $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \oplus \bar{b} \oplus \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \oplus \bar{a}b = \bar{b} \oplus a\bar{b}$, дистрибутивности $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$.

Дифференция $\oplus$, как и ее отрицание – эквиваленция $\leftrightarrow$, есть самообратимая функция, равная своей обратной $f^{-1} = f$ и не равная тождественной функции: $y = a \oplus x, x = a \oplus y$ [3].

Операции дифференциального базиса легко реализуются в вещественной арифметике: отрицание $\bar{a} = 1 - a$; различимость $a \oplus b = |a - b| = a + b - 2ab = (a - b)^2$, т.к. $a^2 = a$ – идемпотентность вещественного умножение двоичных переменных; умножение логическое и вещественное совпадают в шкале $\{0,1\}$.

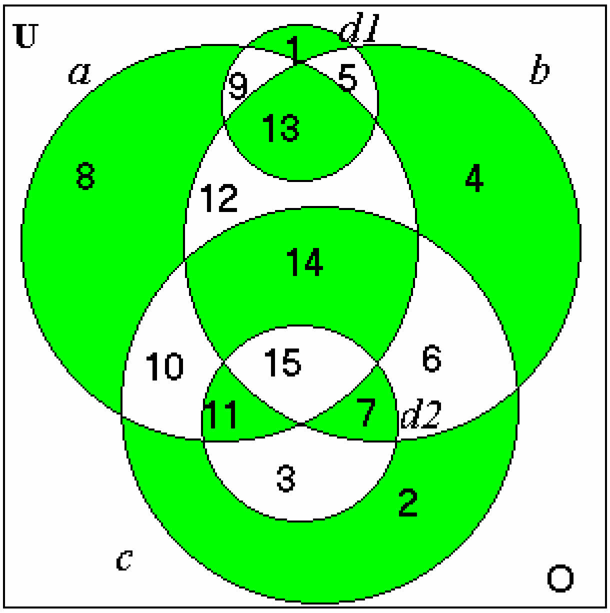
Для представления произвольной логической функции дифференциальным двоичным полиномом необходимо заменить базисными все операции, не входящие в дифференциальный базис, используя формулы табл. 1, с последующим раскрытием скобок и поглощением лишних символов.

Таблица 1

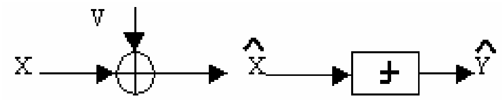
$f(x)$	$\bigoplus\limits_i \prod\limits_j (x)$	$\Delta f(x, \mathrm{v})$
x $\bar{x}$	x $\bar{x}$	v
$x_1 \cdot x_2$ $x_1 \vert x_2$	$x_1 \cdot x_2$ $\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_2$	$x_1 \mathrm{v}_2 \oplus x_2 \mathrm{v}_1 \oplus \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_2$
$x_1 + x_2$ $x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 = x_1 \oplus \bar{x}_1 x_2 = x_2 \oplus x_1 \bar{x}_2$ $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \mathrm{v}_2 \oplus \bar{x}_2 \mathrm{v}_1 \oplus \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_2$
$x_1 - x_2$ $x_1 \to x_2$	$x_1 \bar{x}_2 = x_1 \oplus x_1 x_2$ $\bar{x}_1 \oplus x_1 x_2$	$x_1 \mathrm{v}_2 \oplus \bar{x}_2 \mathrm{v}_1 \oplus \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_2$
$x_1 \leftrightarrow x_2$ $x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \oplus x_2$ $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2$	$\mathrm{v}_1 \oplus \mathrm{v}_2$

Модульная сумма $s = a \oplus b \oplus c \oplus d$ четырех слабо связанных признаков изображена на рисунке, области $s = 1$ заштрихованы. В общем случае дифференциальный полином $s = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i$ от n независимых признаков a_i разбивает универсум U на 2^n элементарных классов, которые образуют дифференциальное поле с правильной двухцветной раскраской диаграммы Эйлера типа щахматной доски: соседние классы принимают противоположные значения s, равные 1 при нечетном покрытии объектов предметики свойствами $a_i = 1$ и нулю при четном, т.к. при пересечении границы признака четность меняется. Десятичный номер элементарного класса на рисунке равен двоичному числу *abcd* в позиционный записи и меняется от нуля 0000 до 15=1111.

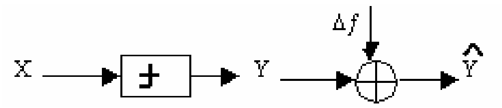
В третьей колонке таблицы 1 представлены ошибки логических операций, которые мы выведем для общего случая. Пусть задана логическая



функция $y = f(x)$ от двоичного вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ размерности n и задан искаженный вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n) = (x_i \oplus \mathrm{v}_i)_n = x \oplus \mathrm{v}$ – n-мерная дифференция вектора x с вектором ошибок $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, ..., \mathrm{v}_n)$. При вычислении функции получаем искаженный результат $\hat{y} = f(\hat{x})$, который будет равен истинному значению y, если $\mathrm{v} = 0$. Ошибка решения Δ равна сумме ошибок первого $\Delta_1 = \hat{y} - y$ и второго $\Delta_2 = y - \hat{y}$ рода: $\Delta = \hat{y} \oplus y = (\hat{y} - y) + (y - \hat{y}) = = \Delta_1 \oplus \Delta_2 = \Delta_1 + \Delta_2$ – функция от $2n$ аргументов, $\Delta = \Delta f(x, \mathrm{v})$. Вектор v является входной помехой функции $\hat{y} = f(\hat{x})$:



, которую можно преобразовать в выходную помеху $\Delta f(x, \mathrm{v})$:



, так как $f(\hat{x}) = f(x) \oplus \Delta f(x, \mathrm{v})$ – модульная сумма двух дифференциальных полиномов. Отметим также неизменность ошибки при отрицании, т.е. ошибки f и $\overline{f}$ совпадают, что отражено в таблице 1.

Приведенные формулы сами по себе имеют небольшую практическую ценность, т.к. в реальных ситуациях векторы x и v неизвестны, а при имитационном моделировании возникают переборные задачи большой вычислительной сложности. Преодолеть указанные затруднения можно переходом от индивидуальных оценок ошибок $\Delta f(x, \mathrm{v})$ в режиме имитационного моделирования к средним оценкам интеграционного моделирования, которое основано на аппарате частотной логики.

Универсум ситуаций есть сомножество, определяемое распределением $q(x, \mathrm{v})$ частостей (вероятностей) признаков и его моментами – объемами признаков $\{x_i\}, \{\mathrm{v}_i\}$, их парных, тройных и т.д. пересечений до момента порядка $2n$, которые описывают все виды частотных и логических связей между параметрами ситуаций. Среднее значение ошибки $\Delta f(x, \mathrm{v})$ в универсуме U есть $\Delta_s = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \Delta f(x_j, \mathrm{v}_j) = \sum_{x,\mathrm{v}} \Delta f(x, \mathrm{v}) \cdot q(x, \mathrm{v})$ Зависимости средней ошибки от параметров ситуации определяется выражениями: $\Delta_s(x) = \sum_{\mathrm{v}} \Delta f(x, \mathrm{v}) \cdot q(\mathrm{v} \mid \mathrm{x})$, $\delta_s(x) = \Delta_s(x) / \underline{\hat{y}}$ – относительная ошибка при $\hat{y} = 1$, $\Delta_s(\hat{x}) = \sum_{\mathrm{x,v}} \Delta f(x, \mathrm{v}) \cdot q(x, \mathrm{v} \mid \hat{x})$, $\Delta_s(\hat{y}) = \sum_{\mathrm{x,v}} \Delta f(x, \mathrm{v}) \cdot q(x, \mathrm{v} \mid \hat{y})$, где условные распределения $q(\mathrm{v} \mid x) = q(x, \mathrm{v}) / q(x)$, $q(x, \mathrm{v} \mid \hat{x}) = q(x, \mathrm{v}) \cdot \prod_{i=1}^{n} (\hat{x}_i \leftrightarrow x_i \oplus \mathrm{v}_i) / q(\hat{x})$, $q(x, \mathrm{v} \mid \hat{y}) = q(x, \mathrm{v})(\hat{y} \leftrightarrow f(\hat{x})) / q(\hat{y})$. В этих формулах двоичный результат логических вычислений, 0 либо 1, рассматривается как вещественное число в обычной арифметике. Формулы частотной логики в дифференциальном базисе сведены в табл.2.

Таблица 2.

$f(a_1, ..., a_n)$	$\underline{f}(\underline{a}_i, \underline{a}_{ij} ..., \underline{a}_{1...n})$
$a_1, a_2 ..., a_k$	$\underline{a}_{1...k}$
$\bigoplus_{i=1}^{n} a_i = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n$	$\sum_i^n \underline{a}_i - 2\sum_{ij}^n \underline{a}_{ij} + 4\sum_{ijk}^n \underline{a}_{ijk} - \cdots + (-2)^{n-1} \underline{a}_{1...n}$
$a_1 \oplus \cdots \oplus a_2 \oplus \bar{a}_3 \oplus \cdots \oplus \bar{a}_4$	$\left\lfloor \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \right\rfloor$ – для четного числа отрицания $1 - \left\lfloor \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \right\rfloor$ – для нечетного числа отрицания
$a_1 \cdots a_2 \cdot \bar{a}_3 \cdots \bar{a}_4$	$\underline{a}_{1...2} - \sum_i \underline{a}_{1...2i} + \sum_{ij} \underline{a}_{1...2ij} - \cdots \pm \underline{a}_{1...n}$
$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n$	$1 - \sum_i \underline{a}_i + \sum_{ij} \underline{a}_{ij} - \cdots + (-1)^n \underline{a}_{1...n}$

Эти формулы используются при анализе преобразований ошибок в логических сетях, процессах дедуктивного вывода в системах поддержки принятия решений и обосновании достоверности результатов исследования, проектирования, управления. Например, решение задачи сходства или различия имеет ошибку эквиваленции или дифференции $\hat{x}_1 \oplus \hat{x}_2$, не зависящую от x_1, x_2 и приближенно равную сумме ошибок двух признаков $\Delta_s = \underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_2 - 2\underline{\mathrm{v}}_{12} \approx \underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_2$, где $\mathrm{v}_{12} = \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_2$. Ошибка умножения (конъюнкции) зависит от x и равна выражению в вещественной алгебре и арифметике: $\Delta_s(x) = x_1 \underline{\mathrm{v}}_2 + x_2 \underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_{12} - 2\underline{\mathrm{v}}_{12} \cdot (x_1 + x_2 - x_1 x_2) \approx x_1 \underline{\mathrm{v}}_2 + x_2 \underline{\mathrm{v}}_1$, средняя ошибка логического умножения в универсуме U:

$\Delta_s = \lfloor x_1 \mathrm{v}_2 \rfloor + \lfloor x_2 \mathrm{v}_1 \rfloor - 2\lfloor x_1 \mathrm{v}_{12} \rfloor - 2\lfloor x_2 \mathrm{v}_{12} \rfloor + 2\lfloor x_{12} \mathrm{v}_{12} \rfloor$, где $x_{12} = x_1 x_2$, а в предположении независимости вариаций x и v: $q(x,\mathrm{v}) = q(x)\cdot q(\mathrm{v})$, ошибка примерно равна сумме произведений объёмов признаков: $\Delta_s = \underline{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \underline{\mathrm{v}}_2 + \underline{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_{12} - 2\underline{\mathrm{v}}_{12}(\underline{\boldsymbol{x}}_1 + \underline{\boldsymbol{x}}_2 - \underline{\boldsymbol{x}}_{12}) \approx \underline{\boldsymbol{x}}_1 \underline{\mathrm{v}}_2 + \underline{\boldsymbol{x}}_2 \underline{\mathrm{v}}_1$. Выражение для ошибки логического сложения имеет тот же вид, но признаки x_1 и x_2 входят с отрицаниями.

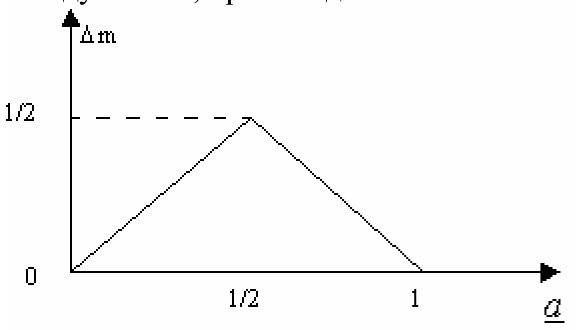
Зная уровень частотной точности и достоверности результата $\hat{y} = f(\hat{x})$ и сравнивая его с допустимым граничным уровнем Δ_Γ качества решения можно определить границы применимости логического правила $f(\hat{x})$ в среднем $\Delta_S < \Delta_\Gamma$, в отдельных ситуациях $\Delta_S(\hat{x}) < \Delta_\Gamma$ и т. п. Более жёсткие границы применимости в информационных технологиях классических методов построения логических функций возникают при учёте размытых частотных связей между параметрами, которые часто несут ценную информацию об искомом y. В самом деле, логическая функция $f(x)$ обычно строится в предположении, что объёмные доли искажений v_i результатов измерений—вычислений малы, $\underline{\mathrm{v}} \approx 0$, а те данные $\hat{z}_j$, которым заведомо нельзя приписать предельные значения истинности 0 или 1, при классическом подходе всегда отбрасываются.

Если же расширить набор исходных признаков $x \to z = (x, z')$, включив в него размытые признаки z', то возникает возможность учесть частотные связи и построить новое оптимальное по точности логическое правило принятия решения $\hat{y} = f_{opt}(\hat{z})$, которое заведомо не хуже исходной логической функции: $\Delta_{opt} \le \Delta_S$, а возможно, существенно лучше правила $f(\hat{x})$ и удовлетворяет поставленным требованиям $\Delta_{opt} < \Delta_\Gamma$. Эти условия определяют целесообразность перехода от классических к частотно-логическим методам анализа и синтеза дискретных качественных решений. К изложенным соображениям в реальных ситуациях добавляется также учёт ограничений частотной логики при искажениях априорики $q(x,\mathrm{v})$, учёт возможностей упрощения логических аппроксимаций при переходе к субоптимальным решениям [3].

Частотная логика является важнейшим представителем неклассических логик, т. к. она служит удобным инструментом анализа точности других неклассических логик − троичной, корреляционной, многозначных логик, достоверность которых изучена в работах [1,3]. Другие неклассические логики, не обладающие явной формализацией информационной, более точно, адеквативной семантики − модальная, индуктивная, правдоподобная, нечёткая логики не содержат аппарата оценок истинности, погрешности, формализованной меры адекватности и неопределённости решений, поэтому эти характеристики получают внелогическими методами − экспериментально либо имитационным моделированием.

Далее мы ограничимся логиками с адекватиной (точностной) семантикой. Нечеткая логика Заде оперирует вещественными функциями принадлежности $\mu_i(z) = \mu(z \in Q_i)$ некоторого объекта z нечеткому множеству Q_i. Функции μ_i принимают вещественные значения в интервале $0 \le \mu_i \le 1$. Объединениям, пересечениям и дополнениям нечетких множеств соответствуют нечеткие логические операции сложения - дизъюнкции $\mu_1 + \mu_2 = \max(\mu_1, \mu_2)$, умножения - конъюнкции $\mu_1 \cdot \mu_2 = \min(\mu_1, \mu_2)$ и отрицания–негации $\overline{\mu} = 1 - \mu$, см.[4]. Если функцию $\mu_i(z)$ интерпретировать как частость или вероятность истинности высказывания о принадлежности $z \in Q_i$, то можно точно оценить погрешности нечетких операций при неточно заданных исходных данных об истинности двоичных логических признаков.

Итак полагаем: нечеткие функции принадлежности $\mu_1(a)$ и $\mu_2(b)$ есть меры истинности искаженных двоичных признаков $a = \hat{x}_1 = x_1 \oplus \mathrm{v}_1$, $b = \hat{x}_2 = x_2 \oplus \mathrm{v}_2$, которые для упрощения вывода предположим упорядоченными по их объемам: $\underline{a} \le \underline{b}$. Операция отрицания $\overline{a}$, как и тождественное преобразование нечетких признаков не изменяют их погрешностей: $\underline{\overline{a}} = 1 - \underline{a}$ — отрицание имеет исходное искажение v_1. Операции сложения и умножения признаков a и b, как они определены в нечеткой логике, привносят дополнительные ошибки к выражениям $\Delta f(x, \mathrm{v})$ из табл.1, так как в их определении не учитываются частотные и логические связи между a и b, причем дополнительные ошибки имеют систематический характер.



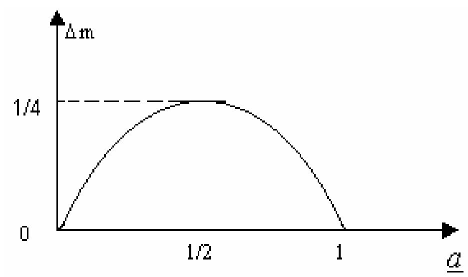
В нечеткой логике Заде исходными данными служат объемы признаков $\underline{a}$, $\underline{b}$, а истинный объем произведения $\underline{ab}$ считается неизвестным и оценивается выражением $\underline{\hat{ab}} = \underline{a}$ с ошибкой всегда положительной: $\Delta'_{\bullet} = \underline{\hat{ab}} - \underline{ab} = \underline{a} - \underline{ab} \ge 0$. Минимальное значение ноль дополнительной ошибки нечеткого перемножения возникает при позитивной логической связи a и b– вложенности признаков (из a следует b). Максимальное значение ошибки $\Delta_m = \max \Delta'_{\bullet}$ соответствует минимуму объема пересечения: $\min \underline{\boldsymbol{ab}} = \max(0, \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} - 1) = \boldsymbol{h}$, который достигается при $\underline{a} = \underline{b}$ и предельной негативной связи признаков, их несовместности, следовательно, максимальная ошибка лежит в интервале $0 \le \Delta_{\boldsymbol{m}} \le \underline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{h}$. Ее зависимость от объема равных признаков кусочно-линейна: $\Delta_m = \underline{a}$ при $\underline{a} < \dfrac{1}{2}$ и $\Delta_m = 1 - \underline{a}$ при $\underline{a} \ge \dfrac{1}{2}$. Итак, при увеличении размытия признаков и отклонении от классических значений истинности 0 или 1 дополнительная ошибка нечеткой логики растет от 0 до максимально возможной, соответствующей предельной неопределенности решения $\Delta_m = \dfrac{1}{2}$, равной a среднеквадратической неопределенности $\sigma = \sqrt{\Delta_m (1 - \Delta_m)} = \dfrac{1}{2}$ — “безразлично – либо да, либо нет”.

Ошибка нечеткого логического сложения Δ_+ по модулю равна $\Delta_{\bullet}$, но имеет противоположный знак: $\Delta_+ = \underline{\widehat{a+b}} - \underline{a+b} = \underline{ab} - \underline{a} = -\Delta_{\bullet} \le 0$ – эта ошибка первого рода, “пропуск цели”, носит систематический характер и равна нулю при вложенности признаков, в иных случаях всегда отрицательна и лежит в пределах $\boldsymbol{h} - \underline{\boldsymbol{a}} \le \Delta_+ \le 0$. Следовательно, размытие признаков a и b, т.е. отклонение их истинностей от 0 и 1 вносит большую, до 50%, дополнительную абсолютную ошибку в результаты нечеткого логического вывода за счет систематического завышения (по определению) логического произведения – это ошибка только первого рода, и систематического занижения логической суммы – это ошибка только второго рода. Модуль этих ошибок лежит в интервале $0 \le |\Delta| \le \frac{1}{2}$, верхняя граница которого выражает полную неопределенность.

В системах дискретного моделирования и принятия решений помимо минимаксной размытой логики Заде нашла применение так называемая вероятностная нечеткая логика, в которой коньюнкция и дизьюнкция определяются не минимальным и максимальным объемом двоичных признаков, а вероятностями коньюнкции и дизьюнкции в предположении независимости признаков. Исходная информация этого варианта размытой логики, получаемая внелогическими методами, та же, что и в логике Заде, и так же не учитываются частотные и логические связи между признаками.

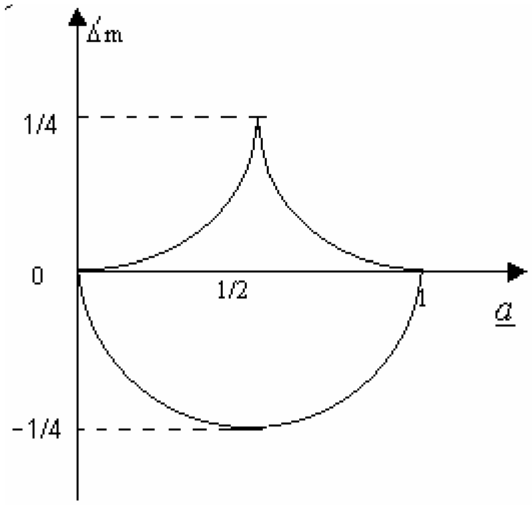
Оценим дополнительные к выражениям таблицы 1 ошибки нечетких операций этого логического приближения: $a \overset{\wedge}{\cdot} b = \underline{a} \cdot \underline{b}$, $a \overset{\wedge}{+} b = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b}$. Из этих формул сразу следует, что ошибка сложения равна, как и в логике Заде, с обратным знаком ошибке умножения $\Delta_{\bullet} = -\Delta_+ = \underline{a} \cdot \underline{b} - \underline{ab}$, где вычитаемое есть неизвестное истинное значение объема произведения. Максимальное значение ошибки проявляется при позитивной или негативной логической связи логических признаков с коэффициентом корреляции $r = \pm 1$, [2,3].

Пусть признак a вложен в признак b, $r = 1$, $\underline{a} \le \underline{b}, a \to b =$ “из a следует b”, тогда максимальная ошибка сложения $\Delta_+ = \underline{ab} - \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}(1 - \underline{b})$ будет соответствовать минимальному объему большого признака: $\underline{b} = \underline{a}$ т.е. $\Delta_m = \max \Delta_+ = \underline{a} - \underline{a}^2$, равна дисперсии, квадратической неопределенности меры истинности признака a.



Пусть теперь признаки несовместны, $r = -1$, $\overline{a} \to b =$ “из не–a следует b”, тогда максимальная ошибка умножения $\Delta_{\bullet} = \underline{a} \cdot \underline{b} - \underline{ab}$ соответствует максимальному объему меньшего признака $a = b \le \frac{1}{2}$, $\Delta'_m = \max \Delta_{\bullet} = \underline{a}^2$. При $\underline{a} = \underline{b} > \frac{1}{2}$ несовместность нарушается: $\underline{ab} > 0$, $r > -1$, и максимальная ошибка равна $(1 - \underline{a})^2$ – с увеличением объемов признаков ошибка уменьшается до нуля.

Итак, поскольку максимум ошибки умножения равен минимуму ошибки сложения и наоборот, то эти ошибки лежат в интервале $-\frac{1}{4} \le \Delta \le \frac{1}{4}$ и, в отличие от логики Заде, имеют систематические и случайные составляющие в разных классах априорики. Диаметр $\boldsymbol{D}_\Delta$ области неопределенности дополнительной ошибки размытого вероятностного приближения полностью совпадает с соответствующим диаметром логики Заде:полный диаметр $\boldsymbol{D}_\Delta = \max\Delta - \min\Delta = \frac{1}{2}$, совпадает и его зависимость от объема признака $D_\Delta(\underline{a}) = \begin{cases} \underline{a} \;\; при \;\; \underline{a} \le \frac{1}{2} \\ 1-\underline{a} \;\; при \;\; \underline{a} > \frac{1}{2} \end{cases}$.



В заключение определим границы возможных расхождений между лапласовыми, в некотором смысле наилучшими, оценками логических произведений [2] и популярными в практических алгоритмах вероятностными оценками, которые исходят из гипотезы независимости признаков: $\widehat{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$. Лапласова оценка объема пересечения $\lfloor ab \rfloor_L = \frac{h+a}{2}$, где $h = \max(0, \underline{a} + \underline{b} - 1)$ – минимально возможный объем пересечения признаков.

Расхождение оценок $\Delta_p = \underline{ab}_L - \overline{a} \cdot \overline{b}$ для малого суммарного объема $\underline{a} + \underline{b} < 1$ равно $\Delta_p = \underline{a}\left(\frac{1}{2} - \underline{b}\right)$ при $\underline{a} \le \underline{b}$ и достигает максимума $\Delta_{pm} = \frac{1}{16}$ в точке $\underline{a} = \underline{b} = \frac{1}{4}$, а минимальное значение $\Delta'_{pm} = -\frac{1}{16}$ наступает в точке $\underline{a} = \frac{1}{4}, \underline{b} = \frac{3}{4}$. Для больших признаков $\underline{a} + \underline{b} \ge 1$ расхождения $\Delta_p = \left(\underline{a} - \frac{1}{2}\right)(1 - \underline{b})$ имеет те же пределы изменения $-\frac{1}{16} \le \Delta_p \le \frac{1}{16}$, максимум достигается при $\underline{a} = \underline{b} = \frac{3}{4}$, а минимум – в той же точке, что и для малых признаков: $\underline{a} = \frac{1}{4}, \underline{b} = \frac{3}{4}$.

При высоких требованиях к точности логического моделирования, увеличении детальности описания и числа информативных признаков расхождение Δ_p становится слишком большим и предпочтение в логических аппроксимациях следует отдать лапласовым минимаксным оценкам, заменяя ими далеко не всегда контролируемые оценки по гипотезам независимости.

Список литературы

1. Зверев Г. Н. Частотная логика – альтернатива классической логике в новых информационных технологиях. –Информационные технологии, №11, 1998, С.2–10.
2. Зверев Г. Н. Логические аппроксимации, лапласовы оценки и корреляционная логика. – Информационные технологии, №2, 1999, С. 35–40.
3. Зверев Г.Н. Основания теоретической информатики. Разд. 1–7 – Уфа, УГАТУ, 1995– 97.
4. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации. – М. : Наука, 1981, 208 с.