

Г.Н. Зверев, д-р технических наук

Уфимский государственный авиационный технический университет

## Объективные многозначные логики в интеллектуальных системах моделирования и обработки информации

*Статья посвящена приложению теории искусственного интеллекта к проблеме формализации информационной семантики логических систем, выделения объективированной составляющей неклассических логик, допускающей строгие оценки истинности и неопределенности фактических и априорных знаний. В четверичной шкале строятся обратные логические операции и уточняется семантика логического правила отделения модус поненс для неопределенных посылок и импликаций.*

Логический подход к созданию новых информационных технологий является в настоящее время, пожалуй, наиболее распространенным при разработке интеллектуальных и экспертных систем в различных предметных областях. В этих исследованиях двоичная классическая логика обычно замещается какой-либо неклассической логикой, по-видимому более соответствующей информационной ситуации и поставленной проблеме. Число и разнообразие неклассических логик – модальных, интуиционистских, конструктивистских, многозначных, индуктивных, вероятностных, размытых, правдоподобных, нечетких, диффузных, квантовых и т.д.[1-6] - экспоненциально растет со временем, вместе с тем эти логики пока не оказывают заметного влияния на теории и информационный инструментарий предметик, что свидетельствует за редким исключением о неблагоприятии, за редким исключением, данного направления исследований и разработок.

Накопленный опыт с очевидностью показывает, что с позиций стоящих актуальных задач автоматизации человеческой деятельности основные трудности создания многозначных и других неклассических логик не математического или алгоритмического свойства, а принципиально имеют смысловой характер, обусловленный отсутствием конструктивных определений истинности и неопределенности, общезначимых однозначно формализованных семантик неклассических логик, согласованных с традициями предметик и проверенными способами оценок достоверности, изменчивости объектов, погрешности измерений, вычислений, рассуждений, и последствий принимаемых решений. Успехи теоретической информатики в объективизации информационных процессов, в создании теории искусственного интеллекта позволяют надеяться на успешное преодоление указанных затруднений. В работе [7], опираясь на формализм схемы косвенного обращения, дано строгое конструктивное определение эмпирической и теоретической истинности в единичной и в сомножестве единичных информационных ситуаций, описано обобщение классической двухзначной логики на размытые неопределенные ситуации и развит аппарат частотной (обобщенной вероятностной) логики, который оперирует частотными и логическими связями двоичных переменных. Настоящая статья посвящена другим строгим обобщениям классической логики, содержащим аппарат оценки истинности и её неопределенности, формализованной в соответствии с принципами информационной семантики [8].

### 1. Объективированный субъект и объективные логики с информационной семантикой

Исходным пунктом формализации классической логики, идущим от стоиков, в частности, от Хризиппа, является **принцип двужначности** свойств и отношений, близкий по смыслу к логическим законам исключенного третьего и противоречия: каждое утверждение либо истинно, либо ложно. Реальные информационные процессы и знания о материально-информационной реальности не укладываются в жесткую схему двужначности всякого знания, но могут быть сведены (с некоторыми потерями информации и допустимыми приближениями) к наборам взаимосвязанных двужначных шкал, семантика которых может отличаться от оценок истины или ее отрицания –

лжи, и примером этого могут служить модальные логики, оперирующие модальностями: возможно-невозможно, достоверно-недостоверно, закономерно-случайно, необходимо-необходимо.

Первая многозначная логика появилась 80 лет назад – трехзначная логика Я.Лукаевича [9], в которой помимо  $истины=1$  и  $лжи=0$  вводится “промежуточное” значение  $=\frac{1}{2}$  с не вполне опре-

деленной семантикой: может быть, безразлично, случайно, возможно, ни истина, ни ложь. Через год Э.Пост предложил  $m$ -значную логику,  $m \geq 2$ , в которой вообще абстрагировался от истинности и неопределенности высказываний, представляя логику как теорию дискретных функций, заданных в конечнозначных шкалах [10]. Эти работы стимулировали появление большого разнообразия многозначных логик, однако неполнота формализации исходных понятий и типовых информационных ситуаций, отрыв от внелогических источников информации и потребителей результатов логических процессов, принимающих решения, не позволил достичь общезначимости и определить границы применимости новых логик, характерных для признанной во всех предметиках классической логики. Положение усугубляет широко применяемый в неклассических логиках аксиоматический подход, который привносит дополнительные семантические неопределенности интерпретаций логических формул и значений.

Построение информационной семантики многозначных логик начнем с уточнения понятий формализованного субъекта – “носителя” логики, его **знаний и умений**, а также понятия **логики с информационной семантикой**. Итак, познание и целевое преобразование материально-информационной реальности выполняют активные субъекты, вооруженные средствами наблюдения, вычисления, рассуждения. Биологический субъект с его не вполне изученными механизмами естественного мышления и речи, органами чувств, субъективными представлениями и интуицией, заменяется в формализованной информационной семантике строго определенной моделью – системой **объективированного субъекта *obsub***, оснащенного сенсорами  $A$ , рефорами  $B$ , эффекторами  $E$  [11,7], которые функционируют в полном соответствии с известными законами природы, взаимодействуют с изучаемым явлением, порождают на выходе сенсоров  $A$  фактические данные о явлении, о внешнем мире, (используя средства машинного зрения, слуха и другой измерительной техники), преобразуют рефорами искусственного интеллекта внутри системы *obsub* сенсорную информацию совместно с априорными данными системы в новые знания и эффекторные воздействия на внешнюю и внутреннюю среду системы *obsub*. Преобразования  $A, B, E$  полагаем подконтрольными метрологическими и иными способами, т.е. выполняемыми *obsub* с определенной точностью.

Процесс получения системой *obsub* знаний о каком-либо материальном объекте *obj* или процессе в наиболее общем виде описывается информационной моделью:  $obj \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} \hat{x}$ , где  $A(obj)=y$  – результаты наблюдений, фактическая информация о свойствах *obj*,  $B(y,J)=\hat{x}$  – результаты вычислений, рассуждений, обработки эмпирических  $y$  и априорных  $J$  данных об исследуемом объекте, о сенсорном и реформном процессе  $AB$ , это фактическая оценка свойств *obj*, отличная от истинного значения  $x$ . Информационный объект  $\hat{x}$  носит название апостериорной информации об изучаемом объекте. Чтобы оценить достоверность, истинность знания  $\hat{x}$  необходимо системе *obsub* тем или иным способом узнать истину  $x$ , т.е. иметь в своём составе прецизионную подсистему – **аккуратор**  $C$ , более точную, чем подсистема  $AB$ , а также средство сравнения  $\hat{x}$  и  $x$  – **адеквататор**  $D$ , тогда мера адекватности  $\nabla$  или ошибки (ложности) есть  $\Delta = \bar{\nabla} = D(\hat{x}, x)$ ,  $\hat{x} = AB(obj)$   $x = C(obj)$ . Источник  $A$  и преобразователь  $B$  экспериментальной и теоретической информации, идеальный источник целевой информации  $C$  и измеритель меры истинности  $D$  определяют конструктивную модель **адеквативного процесса** оценки точности, достоверности  $\nabla = \Delta^1$  или погрешности  $\nabla$  результатов основного информационного процесса, а применительно к классической и неклассическим логикам, эта модель выражает внутреннюю структуру высказываний и предикатов  $P(obj) = ABCD(obj)$ , конструктивно и функционально “привязанных” к источникам информации [7,11].

Знания  $x, \hat{x}$  и умения  $ABCDE$  замкнутой системы *obsub* будем считать вполне известными и точно воспроизводимыми. В открытых системах *obsub*, как и в реальных информационно-

материальных процессах, они могут искажаться, подвергаться учтенным либо неучтенным, не вполне известным воздействиям, поэтому модели в описаниях таких ситуаций помечаются сверху шляпкой, указывающей на возможные неопределенности и отклонения от некоторого объекта, принятого за эталон:  $\Delta \neq \hat{\Delta}$ ,  $J \neq \hat{J}$ ,  $A \neq \hat{A}$  и т.д. В теоретической информатике [11] знание  $\hat{x}$  свойств *obj* называется **основным**, а знание  $\Delta$  или его оценка  $\hat{\Delta}$  свойств знания  $\hat{x}$  называется **адеквативным** знанием, **метазнанием** – информация об информации. Если нам известна оценка  $\hat{x}$  неизвестных свойств  $x$  объекта, но ничего не известно о достоверности  $\forall$  этой оценки, то с позиций информационной семантики знание  $\hat{x}$  превращается в незнание, поэтому уточненное понятие знания свойств *obj* определяется в виде пары информационных объектов  $(\hat{x}, \hat{\Delta})$ , полученных основным и адеквативным процессом познания *obj*, при этом неопределенность истинного значения  $x$  переносится на неопределенность также недоступного истинного значения  $\Delta$ , которое заменяется оценкой  $\hat{\Delta}$ , полагая замену допустимой:  $\hat{\Delta} \approx \Delta$ , в противном случае определение знания усложняется [11].

Данное определение объективного знания вполне согласовано с конструктивным (более жестким, чем традиционные) критерием познания: материальные (скажем, шаровая молния, НЛЮ) либо информационные (естественный интеллект и язык) явления познаны, если они конструктивно воспроизводятся в искусственной контролируемой среде системой типа *obsubj* с заданной точностью и достоверностью:  $\Delta \leq \Delta_{\Gamma}$  – допустимый граничный уровень неадекватности [11].

Все известные виды логик появились как результат формализации тех или иных фрагментов мышления, естественного языка и природных явлений. Проверить адекватность описания мышления и речи моделями психологии, физиологии, лингвистики и абстрактного представления этих моделей в логических системах пока не представляется возможным и в этом нет безусловной необходимости, так как мышление и речь моделируют реальность, представляя знания в среде естественного языка, поэтому достаточно проверить адекватность информационно-логического процесса описания реальности по его результативности, в соответствии с известным функциональным критерием Алана Тьюринга [12], по которому можно отвлечься от структурных различий естественного и искусственного интеллекта, оставляя подконтрольными воспроизводимые объективные знания. Материализация логических процессов и объективирование знаний состоит в конструировании физических объектов и процессов, воспроизводящих результаты логического вывода и оценки их адекватности (точности, достоверности). Такого типа логические системы и модели реальности называются **объективными логиками**.

В теории искусственного интеллекта вводят различные виды знаний-умений и соответствующие им виды семантик. На вход системы типа *obsubj* поступают знаки – носители знаний в виде измерительных, сенсорных сигналов, текстов естественного языка, математических моделей (формул, уравнений, алгоритмов), графических схем, аудио-видеоинформации, баз данных и т.д. При восприятии и переработке информации система *obsubj* присваивает входным и выходным знакам ту или иную семантику, описывающую их смысловые значения. В семиотическом аспекте различают дентовую (объектную) и контовую (модельную) конкретную и абстрактную семантику, в системологическом аспекте различают структурно-параметрическую, конструктивно-процедурную и дескриптивно-декларативную семантику информационных объектов и процессов [11]. Последняя является основной в логиках, в которых знания представлены формализованными текстами, состоящими из понятий, суждений (высказываний и предикатов), рассуждений, из взаимосвязанных описаний – дескрипций, выражающих свойства, связи объектов и знаний о них. Преобразования знаний, их истинностей и неопределенностей выполняется функциями с конструктивно-процедурной семантикой, к которой относят действия, вопросы, приказы, команды информационного взаимодействия. Так формализованное выражение “если  $a$ , то  $b$ , иначе  $c$ ”, в классической логике с дескрипциями, определяет отношения истинностей  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ : при  $\underline{a}$ =истина объект  $\underline{b}$  также есть истина, если же  $\underline{a}$ =ложь, то справедливо высказывание  $c$ =“истинность  $b$  не определена”,  $\underline{c}$ =истина. В процедурной семантике, отличной от декларативной логической, это выражение интерпретируется как выполнение действий  $b$  либо  $c$  в зависимости от условия – предиката  $a$ .

В этой же семантике выражение “если ... то” описывает также функционально обусловленные причинные связи различных состояний или событий  $a, b, c: a \rightarrow b, \text{не-}a \rightarrow c$ . Далее ограничимся дескриптивно-декларативной семантикой логических конструкций в связи с тем, что предикаты и продукции (действия, функции) подчиняются разным формальным правилам.

Материальные и информационные объекты, процессы, действия, алгоритмы и знания о них характеризуются количественными (числовыми) и качественными (нечисловыми, дискретными) свойствами, состояниями, признаками, функциональными и реляционными моделями. Логические системы оперируют дискретными информационными объектами, свойства которых заданы в дискретных шкалах с конечной значностью  $k \geq 2$ . При  $k=2$  имеем простейшую модель двоичной различимости объектов по данному свойству. Эта модель является базисной в классической логике, в двузначных шкалах описываются все свойства, связи объектов, знаний и их истинностей, устанавливаемые базисным отношением равенства:  $\hat{x} = x$  – истина, либо его отрицания  $\hat{x} \neq x$  – ложное знание  $\hat{x}$ .

Качественные характеристики объектов, имеющие более двух возможных значений, такие как цвет предмета, эмоциональное состояние человека, выражаются в многозначных дискретных шкалах:  $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , в которых конкретное значение  $x=x_i, 1 \leq i \leq k$  есть имя этого значения признака объекта, отождествляемое с именем класса, к которому относят объект по свойству  $x$ , скажем  $x_1$ =белый,  $x_2$ =черный, ... ,  $x_k$ =фиолетовый. Многозначное качественное свойство  $x$  объектов легко представить набором двоичных шкал, тогда  $x$  есть двоичный вектор  $(x_1, x_2, \dots, x_k) = x \in \text{Bit}^k$  – двоичное пространство размерности  $k \geq 2, x_i \in \text{Bit} = \{0, 1\}$ . В определенной ситуации один какой-либо компонент вектора  $x_i=1$ , остальные равны нулю, в неопределенных информационных ситуациях это условие может не выполняться. Любое количественное свойство объекта, скажем, вес, объем, скорость, после дискретизации числовой шкалы приближенно представляется двоичным вектором размерности  $k$  из двоичного пространства  $\text{Bit}^k, 2 \leq k < \infty$ .

Мера истинности оценки  $\hat{x}$  количественного либо качественного признака объекта, заданного в  $k$ -мерной двоичной шкале  $\text{Bit}^k$ , в определенной информационной ситуации определяется согласно канонам классической логики в двоичной логической шкале  $\{\text{истина}, \text{ложь}\}$  равенством двоичных векторов:  $x = \hat{x}$  есть истинное знание  $\hat{x}$ , в противном случае  $\hat{x}$  есть ложь, при этом в предметной семантике различают  $k$  видов истины  $\hat{x}_i=x_i=1$  и  $k(k-1)$  видов лжи:  $\hat{x} \neq x, \hat{x}_i=x_j=1$ , остальные компоненты векторов  $\hat{x}$  и  $x$  равны нулю,  $1 \leq i, j \leq k$ , т.е. видов ошибок  $i \neq j$  информационно-логического процесса с различными последствиями использования знания  $\hat{x}$  в принятых решениях.

В неопределенных ситуациях возникает потребность более полной характеристики фактического  $(\hat{x}, \hat{\Delta})$  и идеального  $x$  знания, ситуаций их получения, видов ошибок и адекватностей, вариативностей объектов и процессов их исследования, в связи с чем появились многозначные логические шкалы с многоаспектной характеристикой логического процесса. Эти шкалы также можно представить после дискретизации двоичным вектором  $(h_1, h_2, \dots, h_k) = x \in \text{Bit}^r$  размерности  $r$ . Двоичные характеристики  $h_i \in \text{Bit}, 1 \leq i \leq r$  знания  $(\hat{x}, \hat{\Delta})$  и процесса их получения выражают смысл меры истинности или погрешности после ее дискретизации (см. далее) либо имеют независимую семантику мер адекватностей или определенного вида неопределенности [8]. Именно эти аспекты стараются отразить в известных многозначных логиках. Далее ограничимся изучением строгих, объективных логик, моделирующих свойства внешней и внутренней среды системы *obj*, работы ее сенсоров и рефоров. Информационная семантика этих логик определяется дискретным представлением свойств и связей объектов, мер адекватности и формализованной неопределенности знаний в виде индефиниций конечнозначных переменных или эквивалентных им двоичных векторов [8, 11].

## 2. Логические неопределенности. Трилогика

Простейшим строгим обобщением классической логики, имеющим те же границы общезначимости, что и классическая логика, а также внутренний аппарат точных объективных оценок истинности и её неопределенности в рамках заданного формализма, является **трилогика** – троичная логика с информационной семантикой, в которой к двоичной шкале  $\text{Bit} = \{0, 1\}$  свойств объектов и

их истинностей добавляется третье значение, имеющее формализованную информационную семантику – это знак внутренней неопределенности двоичного свойства или оценки его истинности:  $\theta$  - **биноль**, базисный (круглый) информационный ноль, в тексте, в таблицах данных обозначаемый также прочерком,  $\theta = -$ . Троичная шкала  $Bit_\theta = \{1, 0, \theta\} = \{1, 0, -\}$  выражает информационную семантику двоичных переменных – свойств объектов  $\hat{x}$  или  $x$  в абстрактной троичной номинативной шкале {да, объект обладает свойством  $x$ ; нет, не обладает; не знаю} и адеквативных свойств  $\Delta$  либо  $\nabla$  знания  $\hat{x}$  в логической шкале {истина, ложь, истинность не знаю}. В трилогике, как и в классической логике, могут быть два типа истины  $\hat{x} = x$ :  $\overset{\wedge}{da} = da$  и  $\overset{\wedge}{net} = net$ , два типа лжи  $\hat{x} \neq x$ :  $\overset{\wedge}{da} \neq net$  и  $\overset{\wedge}{net} \neq da$ , а также два типа неопределенности: “значение переменной  $\hat{x}$  неизвестно” и “значение истинности  $\overset{\wedge}{\nabla}$  знания  $\hat{x}$  неизвестно” при этом предполагается выполненным условие, определяющее внутреннюю неопределенность двоичных переменных:  $\hat{x}, \overset{\wedge}{\nabla} \in Bit_-$ : знание  $\hat{x}$  или его значение истинности  $\overset{\wedge}{\nabla}$  есть либо 0, либо 1, либо  $\theta \sim$  “значения  $\hat{x}$  не знаю, но зато знаю, что оно равно 0 или 1”:  $\theta = \{0, 1\} = Bit$ .

При нарушении условия  $\hat{x} \in Bit_-$  в силу ошибок исходной формализации либо реализации логического процесса, приводящим к абсурдным результатам, скажем, при  $\hat{x} = 2$ , возникает ситуация внешней противоречивой неопределенности:  $\hat{x} \notin Bit_\theta$ , выводящей значения логических переменных из области допустимых исходной формализацией значений. Эта абсурдная ситуация помечается знаком **киноль**  $\square$  – критический (квадратный) информационный ноль:  $\Delta = \square$  либо  $\hat{x} = \square$ , вместо  $\hat{x} = 2 \notin Bit_\theta$ . Знак киноль вырабатывают контролирующие модули дедуктивных систем – предусловия и постусловия частичных предикатов и продукций функций и реляций. Введение киноля расширяет троичную шкалу до четверичной и превращает трилогику в тетралогику. Далее будет формализована семантика абсурдного противоречия и внешней неопределенности объектов тетралогики.

Знак биноль  $\theta$  внутренней неопределенности не выводит информационно-логический процесс из области допустимых значений двоичных переменных, а лишь явно отличает неизвестные от известных и для них вводятся разные правила логических преобразований. Троичная шкала  $\{1, 0, \theta\}$  значений двоичных переменных есть иерархическая шкала  $\{1, 0, \{1, 0\}\}$ , в которой знак биноль описывает незаданность либо внутренне противоречивую переопределенность задания значения двоичного номинативного либо логического признака и выражает смысл временного нарушения закона исключенного третьего: “иного значения, кроме 1 и 0, не дано” в виде принципа отложенного решения: “значение двоичной переменной пока не известно”. В традиционных представлениях информационных процессов, формализованных в понятиях классической логики также присутствует подобная неопределенность, но вне логических формул и правил вывода. Задается эта неопределенность так: естественный интеллект разделяет вне логического формализма двоичные переменные на известные и неизвестные, но вычислять логические функции или выполнять шаги логического вывода он может только по действительно или гипотетически известным данным и моделям. Явное введение в логические формализмы значений внутренней неопределенности  $\theta$  с сохранением всех законов классической логики и естественной информационной семантики истинности и неопределенности расширяет возможности логических систем, прежде всего, за счёт учёта зависимостей между неопределённостями, между входом и выходом логической операции.

В работе [8] определены различные виды неопределенностей, их меры и модели, в частности, незаданность, изменчивость, ошибочность, противоречивость априорных знаний о свойстве  $x$ , его апостериорной оценки  $\hat{x}$  и характеристики адекватности  $\nabla$  знания  $\hat{x}$  истинному значению  $x$ . Построение трилогики начнем с предположения о том, что истинное значение свойства  $x$  есть либо 0 либо 1,  $x \in Bit$  – природные объекты имеют вполне определенные свойства, ошибок формализации информационной ситуации нет либо ими можно пренебречь – это так называемая **гипотеза Хризиппа** и примем ее за истину. Мера истинности знания  $\hat{x}$  в логической шкале  $Bit_\theta$  определяется так:  $\nabla = 1$  при  $\hat{x} = x$ ,  $\nabla = 0$  при  $\hat{x} = \bar{x}$  – отрицание  $x$ , обозначаемое также в виде  $\neg x$ ,  $\nabla = \theta$  при

$\hat{x} = \theta$  либо  $\nabla = \theta$ . Последнее значение знания  $\hat{x}$  возникает, во-первых, в априорной ситуации, когда сенсоры и рефоры системы *obsubj* еще не исследовали *obj* и определенное значение  $\hat{x}$  не задано, и во-вторых, в апостериорных ситуациях с противоречивой переопределенностью свойства  $x$  объекта либо множества объектов, когда одни источники информации системы *obsubj* получили оценки  $\hat{x}_i = 1$ , а другие  $\hat{x}_j = 0$ , при этом полученные оценки не противоречат априорике:  $\hat{x}_i, \hat{x}_j \in Bit$ ; если же все источники информации получили одно и то же значение свойства – то это случай полной однозначности знания  $\hat{x}$  и его непротиворечивой переопределенности: все  $\hat{x} = 0$  либо все  $\hat{x} = 1$ .

Переход от двух к трем возможным значениям логической шкалы сильно увеличивает разнообразие логических связей, функций, операций и служит прекрасной иллюстрацией выражения “комбинаторный взрыв”: трилогика имеет 3 константных операции произвольной ариности  $n \geq 0$ , вместо двух в классической логике, 27 унарных операций (вместо 4), 19683 бинарных операций (вместо 16),  $7.6 \cdot 10^{12}$  различных логических функций трех аргументов вместо 256 функций двоичной логики – точное их число равно  $3^{3^n}$  вместо  $2^{2^n}$ . Однако это разнообразие кажущееся из-за сильной формальной и семантической зависимости между функциями, так, в классической логике все функции можно выразить через одну – штрих Шеффера И-НЕ либо стрелку Пирса ИЛИ-НЕ. Решающим шагом сокращения разнообразия в троичной шкале и сохранения естественной семантики истинности и неопределенности знаний и метазнаний является перенос формул и правил классической логики в трилогику в соответствии с информационным **принципом поглощения внутренних неопределенностей**.

Этот принцип определяется так: пусть логическая функция  $y=f(x)$  от двоичных переменных  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет на входе неопределенные значения некоторых аргументов  $x_i = \theta, \dots, x_j = \theta$ , тогда выходу  $y$  функции  $f(x)$  присваивается либо одно определенное значение  $y \in Bit$ , если оно не изменяется при допустимых вариациях неопределенных переменных – это случай поглощения внутренних неопределенностей, либо присваивается неопределенное значение  $y = \theta$ , если хотя бы одно значение функции в области допустимых вариаций неопределенных входных переменных отличается от остальных значений. В случае независимых неопределенностей  $x_i = \theta_i, \dots, x_j = \theta_j$  необходимо выполнить полный перебор всех возможных значений аргументов, например, для двух неопределенностей имеем множество  $\{00, 01, 10, 11\}$ , при зависимых вариациях переменных эта область сокращается, например, если  $x_i = x_j$ , то область есть  $\{00, 11\}$ ,  $\theta_i = \theta_j$ , а если же  $x_i = \bar{x}_j$ , то область вариаций есть  $\{01, 10\}$ ,  $\theta_i = \bar{\theta}_j$ , а если  $x_i \rightarrow x_j$ , то допустимы три возможности (00, 01, 11).

Помимо переносимых из классической логики, в трилогику вводят функции, непосредственно определяемые в троичной шкале, например, константная функция внутренней неопределенности  $\theta(x)$  произвольной ариности  $n \geq 0$ , значение которой равно  $\theta$  независимо от значений фиктивных аргументов  $x=(x_1, \dots, x_n)$ , а также унарная функция истинности Фреге  $y=Fre(x)$  [11], равная 1 при  $x=1$  и 0 в противном случае – при  $x=0, \theta$ , эта функция поглощает неопределенность и переводит троичные значения в двоичную шкалу  $\{1, 0\}$  приравнивая неопределенность лжи, и еще одна троичная операция  $y=Fri(x)$  – инверсная модификация истинностной функции Фреге – функция сомнений в истинности, которая задает обратный переход от определенной истины к неопределенности:  $y = \theta$ , если  $x=1$ , в остальных случаях  $Fri(x)=0$ . При построении аппарата трилогики ограничимся этими функциями и всеми операциями двоичной логики, перенесенными в трилогику согласно принципу поглощения неопределенностей.

Начнем с унарных операций трилогики. В классической логике из четырех унарных операций две являются тривиальными константными операциями с неизменным выходом при любом входе:  $0(x)$  – обнуление логических переменных ~ “всё ложь” и  $1(x)$  – присвоение 1 ~ “всё истина” (к ним мы добавим определенную выше третью и последнюю константную функцию трилогики:  $\theta(x)$ , “всё неопределенно”), а две нетривиальные унарные классические операции с изменяемым выходом есть  $y=x$  – тождественное преобразование, сохраняющее исходную истинность, и  $y = \bar{x}$  – отрицание, переводящее истину в ложь, а ложь в истину. В трилогике эти две операции совпадают с подобными классическими операциями при определенном  $x \in Bit$ , а если аргумент не определен,  $x = \theta$ , то результат  $y = \theta$  согласно принципу поглощения неопределенностей как для тождества, так и

для отрицания, так как вариации  $x$  изменяют  $y=x=\theta$  и  $y=\bar{x}=\neg\{1,0\}=\{\bar{1},\bar{0}\}=\{0,1\}=\theta=\bar{\theta}\sim$  “отрицание неопределенности есть неопределенность”.

Все возможные операции трилогики различаются не только по арности, но и по выходным шкалам. Из двадцати семи унарных операций три константных имеют однозначные шкалы  $\{1\},\{0\},\{\theta\}$ , оставшиеся 24 функции разбиваются на 4 класса по 6 функций в каждом классе, имеющих двузначные и трехзначную выходные шкалы: 1)  $\{0,\theta\}\sim$  “или ложь, или неопределенность”, например, функция  $Fri(x)$ ; 2)  $\{1,\theta\}\sim$  “или истина, или неопределенность”, этот класс операцией отрицания переводится в предыдущий; 3)  $\{1,0\}\sim$  “или истина, или ложь”, например функция  $Fre(x)$ , а также функции классической логики от двоичных аргументов; 4)  $\{1,0,\theta\}=Bit_{\_}\sim$  “все возможно: истина, ложь, неопределенность”, из шести унарных операций этого класса тождественное преобразование и отрицание  $\bar{x}$ , которое в трилогике называется базисным, были определены выше, оставшиеся четыре функции называются модифицированными отрицаниями, они выполняют парные и тройные перестановки истины, лжи и неопределенности в шкале  $Bit_{\_}$ .

Логические функции арности  $n>1$  получаются комбинацией унарных операций трилогики и бинарных операций двоичной логики, перенесенных в троичную шкалу в соответствии с принципом поглощения, при этом необходимо учесть возможные зависимости неопределенных вариаций. В принципе можно ограничиться одной базисной функцией классической логики – функцией Шеффера  $a|b\sim$  “свойства  $a$  и  $b$  несовместны” или функцией Пирса  $a\downarrow b\sim$  “ни  $a$ , ни  $b$ ”, однако базисное представление операций усложняет их логическую семантику, например, отрицание “не- $a$ ” свойства  $a$  есть  $\bar{a}=a|a\sim$  “свойства  $a$  и  $a$  несовместны”, или логическое следование  $a\rightarrow b\sim$  “если  $a$ , то  $b$ ” есть  $a|\bar{b}\sim$  “свойства  $a$  и не- $b$  несовместны”. Поэтому в семантических схемах с неопределенными и определенными истинностями двоичных переменных используют все 8 существенных бинарных операций – логических связок, имеющих непосредственно заданную семантику, при этом 4 функции есть отрицания остальных: 1)  $a+b\sim$  “ $a$  или  $b$ ”, логическая сумма, дизъюнкция есть отрицание  $a\downarrow b$ ; 2)  $a\cdot b\sim$  “ $a$  и  $b$ ”, логическое произведение, конъюнкция есть отрицание  $a|b$ ; 3)  $a-b\sim$  “ $a$  без  $b$ ”, логическое вычитание есть отрицание импликации  $a\rightarrow b\sim$  “если  $a$ , то  $b$ ”; 4)  $a\leftrightarrow b\sim$  “ $a$  равно  $b$ ”, логическая эквиваленция есть отрицание дифференции  $a\oplus b\sim$  “ $a$  не равно  $b$ ”, сумма по модулю 2.

Бинарные операции трилогики, построенные по принципу поглощения логических неопределенностей переменных классической логики в предположении, что неопределенности  $\theta_a$  и  $\theta_b$  независимы, сведены в таблицу 1, в которой информационный ноль обозначен прочерком, в третьей колонке приведена единственная существенная унарная операция классической логики – базисное отрицание:

Таблица 1

$N$	$a$	$b$	$\bar{a}$	$a+b$	$a\cdot b$	$a-b$	$a\rightarrow b$	$a\leftrightarrow b$	$a\oplus b$	$a b$	$a\downarrow b$
1	0	–	1	–	0	0	1	–	–	1	–
2	–	0	–	–	0	–	–	–	–	1	–
3	1	–	0	1	–	–	–	–	–	–	0
4	–	1	–	1	–	0	1	–	–	–	0
5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
6	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
7	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
8	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
9	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0

Первые пять строк таблицы определяют операции с независимыми неопределенностями, четыре последние строки – с однозначно заданными аргументами, они формально строго и конструктивно определяют логические отношения классической логики в контовой семантике. Константа 0 (или 1) и переменная  $\theta$  всегда независимы, особый случай представляет пятая строка, описывающая операции трилогики с двумя разными неопределенностями  $\theta_a$  и  $\theta_b$ , результат которых для всех операций не определен и равен  $\theta$ . Если же  $a$  и  $b$  логически зависимы, то бинарные операции трилогики по существу становятся унарными и доопределяются в соответствии с прин-

ципом поглощения неопределенностей. В самом деле, возможны два вида эквивалентных логических связей двоичных переменных, в первом случае  $b=a$ , тогда  $a + b = a \cdot b = a = \theta$  – идемпотентность сложения и умножения, сохраняющая неопределенность,  $a | b = a \downarrow b = \bar{a} = \theta$  – антиидемпотентность, также сохраняющая неопределенность результатов,  $a - b = a \oplus b = 0$ ,  $a \rightarrow b = a \leftrightarrow b = 1$  – это операции с поглощением неопределенности, во втором случае  $b = \bar{a}$ , тогда  $a + b = a + \bar{a} = 1$  – закон исключенного третьего,  $a \cdot \bar{a} = 0$  – закон противоречия, другие формы этих законов:  $a \oplus \bar{a} = 1$ ,  $a \leftrightarrow \bar{a} = a | \bar{a} = a \downarrow \bar{a} = 0$  – шесть функций поглощают неопределенность, а две их сохраняют:  $a - \bar{a} = a = \theta$ ,  $a \rightarrow \bar{a} = \bar{a} = \theta$ .

Из определений таблицы 1 логических операций и их уточнений для зависимых неопределенностей однозначно следуют все законы классической логики, правила символьных преобразований булевой алгебры, их справедливость в трилогике – в шкале  $Bit_3$  с зависимыми и независимыми неопределенностями: ассоциативность и коммутативность сложения, умножения, эквиваленции, дифференции, законы дистрибутивности, де Моргана, поглощения констант и переменных, эти законы без всяких изменений переносятся в трилогику. Тавтологии – всегда истинные формулы: законы тождества  $a \leftrightarrow a$ , противоречия  $\neg(a \cdot \bar{a})$ , исключенного третьего  $a + \bar{a}$  равны 1 по определению логических операций таблицей 1 и принципом поглощения неопределенностей, они семантически эквивалентны и сводимы по строгим правилам алгебраических преобразований к какому-либо одному закону, скажем, к последнему:  $a \leftrightarrow a = a \cdot a + \bar{a} \cdot \bar{a} = a + \bar{a}$ ,  $\neg(a \bar{a}) = a + \bar{a}$  – закон исключенного третьего, бесосновательно опровергаемый интуиционистской логикой, а из определения базисного отрицания следует тавтология закона двойного отрицания:  $\bar{\bar{a}} \leftrightarrow a$ . В трилогике также справедливы законы контрапозиции  $(\bar{a} \rightarrow b) = (\bar{b} \rightarrow a)$  и разложения эквиваленции  $(a \leftrightarrow b) = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a)$ .

Функции многих переменных ( $n > 2$ ) выражаются через унарные и бинарные операции трилогики, например, в полиномиальной (дизъюнктивной) форме в виде суммы произведений троичных переменных либо их отрицаний, получаемой разложением Шеннона при независимых вариациях неопределенностей: функция от  $n+1$  аргументов  $(x, z) = (x_1, \dots, x_n, z)$  представляется суммой двух функций меньшей ариности, умноженных на  $z$  и  $\bar{z}$ :  $f(x, z) = z \cdot f(x, 1) + \bar{z} \cdot f(x, 0)$ .

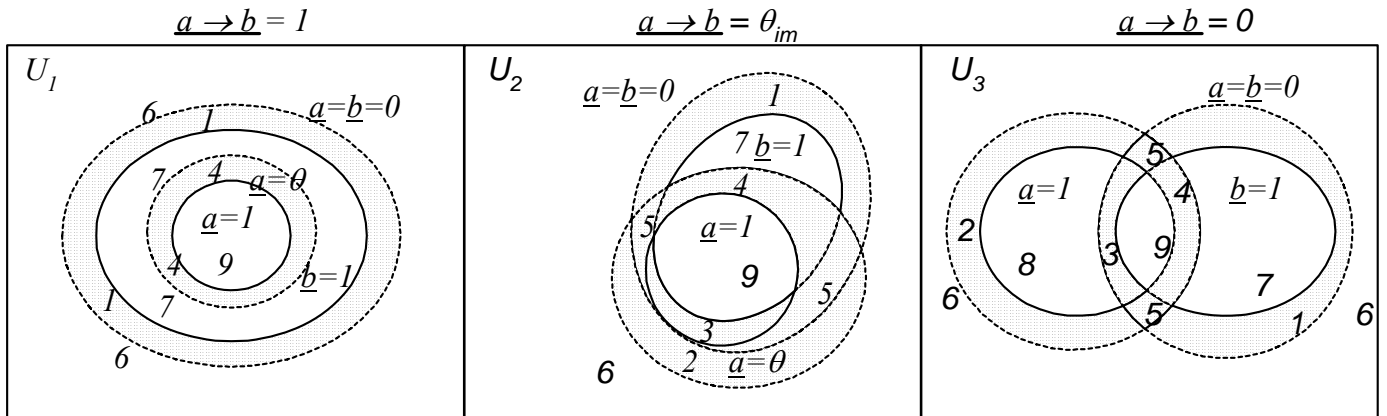
### 3. Логический вывод *modus ponens* с внутренними неопределенностями

Помимо функциональной (конструктивно-процедурной) семантики операции трилогики имеют реляционную (дескриптивно-декларативную) семантику логических связей и отношений. В троичной шкале можно ввести естественный строгий  $<$  и нестрогий  $\leq$  порядок, полагая  $0 < 1$ , *ложь*  $<$  *истина*, *нет*  $<$  *да*, тогда три значения шкалы образуют всегда истинный нестрогий линейный порядок:  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 \leq \{0, 1\} \leq 1$ , так как в отношениях  $0 \leq \{0, 1\}$  и  $\{0, 1\} \leq 1$  справедливы неравенства  $0 \leq 0$ ,  $0 \leq 1$ ,  $1 \leq 1$  как для первого, так и для второго элемента множества  $\theta$ . В реляционной семантике импликация  $a \rightarrow b$  выражается в виде  $a \leq b$ , это неравенство нарушается и становится строго ложным лишь в одной ситуации из девяти возможных:  $1 \leq 0 \sim$  "из истины следует ложь", в трёх ситуациях  $\theta \leq 0$ ,  $1 \leq \theta$ ,  $\theta_a \leq \theta_b$  импликация принимает неопределённое значение, в пяти оставшихся ситуациях импликация истинна,  $a \rightarrow b = 1$ : "из лжи  $a=0$  следует всё что угодно,  $b=0$ ,  $\theta$  или  $1$ ", т.е. "из лжи ничего не следует" (строки 1, 6, 7 табл. 1); "из истины  $a=1$  следует истина  $b=1$ " – последняя строка; особый случай представляет строка 4  $\sim$  "из неопределённости  $a=\theta$  следует истина  $b=1$ " есть логическая сумма двух истинных по определению из табл. 1 утверждений: "из лжи возможно следует истина" и "из истины следует истина" – строки 7 и 8. Интерпретация формул логического следования вызывает затруднения и семантические парадоксы, связанные с совмещением смыслов вполне определённой логической функции  $a \rightarrow b \sim$  "если... то" (без "иначе") и частично определённой обратной бинарной логической функции модус поненс, которая по истинности одного входа  $a$  и истинности  $a \rightarrow b$  импликации определяет возможность оценки истинности  $b$  – второго входного объекта импликации. Логический вывод по схеме отделения модус поненс:  $a, a \rightarrow b \mid \text{---} b \sim$  "если истинны факт  $a$  и правило  $a \rightarrow b$ , то заключение  $b$  также истинно" в реляци-



онной семантике классической логики имеет следующее обоснование: в истинное неравенство  $a \leq b$  представляем  $\underline{a}=1$ , тогда  $\underline{b}=1$  в силу соотношения  $1 \leq b \sim$  "если  $a$  истинно, то  $b$  заведомо истинно в упорядоченной шкале  $\{0, 1\}$ :  $\underline{b} \geq 1$ ".

Правило модус поненс не только остается верным в шкале  $\{0, \theta, 1\}$  трилогики, но и расширяет область точных решений при возникновении зависимостей между неопределенностями и их поглощении. Это можно проиллюстрировать диаграммами Эйлера в трех универсумах информационных ситуаций, в которых общее правило  $a \rightarrow b = \forall obj(a(obj) \rightarrow b(obj))$  принимает три различных значения истинности:  $1, \theta, 0$  (кванторы общности  $\forall$  и существования  $\exists$  в трилогике, как и в классической логике, принимают как логическое произведение  $\Pi$  и логическая сумма  $\Sigma$  по всем объектам – информационным ситуациям универсума):

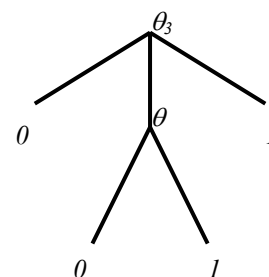


В универсуме  $U_1$  импликация  $a \rightarrow b$  истинна для всех объектов универсума, т.к. в нём существуют зависимости между определёнными и неопределёнными значениями свойств  $a$  и  $b$  объектов универсума. Объекты, определённо обладающие свойствами  $a(obj)=1$  или  $b(obj)=1$  размещаются внутри кругов Эйлера, вне кругов непосредственно к границе истины примыкает ореол неопределенности  $a(obj)=\theta_a$  или  $b(obj)=\theta_b$  – показан штриховой границей и затемнением, вне ореола размещены объекты, определённо не обладающие свойствами  $a$  и  $b$ . Номера зон на диаграмме соответствуют различным сочетаниям истинностей аргументов – номерам строк таблицы 1. Общая истинность импликации в  $U_1$  обусловлена логической зависимостью переменных  $a, b \in Bit_\theta$ : круг  $a$  вместе со своим ореолом вложен в круг  $b$ , иными словами неопределенность посылки  $a$  не выводит из класса объектов  $b=1$ , следовательно, ситуации, в которых импликация ложна (строка 8) или неопределенна (строки 2,3,5) отсутствуют в универсуме  $U_1$ . Правило логического вывода модус поненс при такой зависимости формулируется так: "если импликация  $a \rightarrow b$  истинна, а посылка  $a$  истинна или неопределенна, то заключение  $b(obj)$  истинно" – это верно для всех объектов внутри штриховой окружности  $a$ , при ложности посылки  $a(obj)$  правило вывода никак не определяет свойство  $b(obj)$ , оно может быть равно  $1$ , либо  $\theta$ , либо  $0$  в зависимости от случайного положения объекта на диаграмме  $U_1$ .

В универсуме  $U_2$  общее правило  $a \rightarrow b$  принимает значение неопределенности импликации  $\theta_{im}$ , так как в  $U_2$  существуют зависимости между неопределенностями  $\theta_a$  и  $\theta_b$ , выраженные в отсутствии в  $U_2$  информационных ситуаций, соответствующих ложности импликации – строка 8 таблицы 1. Модус поненс в  $U_2$  учитывает зависимости между неопределенностями  $\theta_a$  и  $\theta_{im}$  и формулируется так: "если импликация  $a \rightarrow b$  не определенная, а посылка  $a(obj)$  есть истина, то заключение  $b(obj)=\theta \geq 0$  не есть достоверная ложь, а лишь неопределенность, которая может быть истиной" – сравни со значениями  $a=\theta, b=1$  в строке 4. При неопределенности посылки  $a(obj)=\theta$  заключение  $b(obj)$  произвольное, оно равно  $1$ , либо  $0$ , либо  $\theta$  – правило модус поненс становится полностью неопределенным, как и в универсуме  $U_3$  общего положения классов объектов  $a$  и  $b$ , между которыми отсутствуют логические связи и возможны все 9 сочетаний значений троичных переменных.

#### 4. Синтаксические и семантические неопределенности

Семантика логических связей и функций произвольной ариности  $n > 2$  определяется семантикой унарных и бинарных операций трилогики, которые интерпретируют крин  $\theta$  лишь как возможность присваивания логическому признаку или функции единичного или нулевого значения, при этом важно различать логико-семантический и синтаксический аспекты операций и значений переменных. Так, равенства  $0 = \theta$ ,  $1 = \theta$ ,  $\theta_a = \theta_b$  принимают логические значения  $\theta$  (седьмая колонка  $a \leftrightarrow b$  таблицы 1), хотя на синтаксическом уровне эти равенства ложны, так как знаки  $0, 1, \theta$  по определению логической шкалы различны и удовлетворяют отношению строгого неравенства  $\neq$ . Подобное различие вводится и при интерпретации отрицания в шкале  $\{1, 0, \theta\}$ : на семантическом уровне справедливы равенства  $\bar{0} = 1$ ,  $\bar{\theta} = \theta$  – отрицание неопределенности не есть определенность, на синтаксическом (формально-математическом) уровне отрицание одного из множества допустимых значений дискретной шкалы есть дополнение-подмножество, состоящее из остальных значений – это **синтаксическое отрицание**, по определению лежащее вне логической семантики истинности и её неопределенности:  $\tilde{1} = \{0, \theta\}$ ,  $\tilde{0} = \{1, \theta\}$ ,  $\tilde{\theta} = \{0, 1\} = \theta = \bar{\theta}$  – результаты семантического и синтаксического отрицания внутренней неопределенности совпадают.



Информационно-логическая семантика синтаксических отрицаний определенных значений  $\tilde{1}$  и  $\tilde{0}$  троичной логической шкалы уточняется теоретико-множественной интерпретацией вариаций значений знания  $\hat{x}$  и его истинности  $\hat{V}$  в этой шкале в соответствии с принципом поглощения неопределенностей. Полная синтаксическая неопределенность переменных трилогики  $\theta_3 = \{0, \theta, 1\}$  – совпадает с ее шкалой  $Bit_\theta$  и имеет иерархическую структуру: при синтаксическом отрицании определенных значений  $0$  или  $1$  остаются в результате подмножества  $\{\theta, 1\}$  или  $\{0, \theta\}$ , которые на семантическом уровне трилогики имеют ту же неопределенность  $\theta = Bit$ . В самом деле, в семантике трилогики есть два значения истинности и только один вид неопределенности, поэтому полная синтаксическая иерархическая неопределенность – дерево  $\theta_3$  и его поддеревья  $\tilde{1}$  и  $\tilde{0}$  путем абстракции от иерархии логической шкалы, выполняемой снятием оболочек (скобок), превращаются в простые, неиерархические сомножества  $\theta_3 \rightarrow \{0, 0, 1, 1\}$ ,  $\tilde{1} \rightarrow \{0, 0, 1\}$ ,  $\tilde{0} \rightarrow \{0, 1, 1\}$ , а затем, в соответствии с теоретико-множественным принципом поглощения неразличимостей и абстракцией от численности, сомножества превращаются в множество внутренней неопределенности:  $\theta_3, \tilde{1}, \tilde{0} \rightarrow \{0, 1\} = \theta$  [11].

Синтаксические и семантические неопределенности информационных ситуаций порождаются и выявляются сенсорами и рефорами системы *obsub*: Если фактических данных о свойстве  $x$  объекта нет, то оценка  $x$  выполняется по априорной информации  $J_x = \{x \in Bit\}$ , отсюда  $\hat{x} = \theta$ . Если есть одна или более оценок  $\hat{x}_j = AB(x, v_j)$  свойства  $x$ , полученных процедурами  $AB$  системы *obsub*, где  $v_j$  – помехи, ошибки наблюдений, вычислений,  $1 \leq j \leq N$  – число источников информации, то результирующая оценка  $\hat{x}$  принимается равной  $0$ , если все  $\hat{x}_j = 0$ , или  $1$  если все  $\hat{x}_j = 1$ , и искажениями  $v_j$  можно пренебречь, если же часть источников выдает значение  $0$ , а другая часть – значение  $1$ , то результирующая оценка  $\hat{x}$  в троичной шкале может быть любой –  $0, 1, \theta$ , в зависимости от объема фактических данных, целей и критериев решаемой задачи. Более адекватным описанием реальности в подобных ситуациях является аппарат частотной логики, в котором нет необходимости абстрагироваться от численности сомножеств [7]. Заметим также, что противоречия в оценках свойства  $x$  в двоичной шкале разными источниками информации не является логическими противоречиями, так как оценка  $\hat{x}_j$  зависит не только от  $x$  но и от помехи  $v_j$ , значение которой неизвестно. Это лишь кажущееся противоречие, лежащее в границах внутренней неопределенности  $x = \theta$ , оно превращается в действительное противоречие, разрушающее логический формализм, если предположить, что ошибки априорики  $J$  и ошибки фактических данных  $v_j$  равны нулю, тогда множество возможных решений  $\hat{x}$  становится пустым.

Введенные выше троичные унарные операции  $Fre(x)$ ,  $Fri(x)$  различают синтаксические и семантические неопределенности, сужают или расширяют логические шкалы, допустимые априорной информационной задачи. Функция Фреге отличает истину  $1$  и ложь  $0$  от ее синтаксического отрицания лжи  $\bar{0}$  и истины  $\bar{1}$ , это преобразование используется при формализации строгих математических рассуждений, не допускающих неопределенностей, которые этим преобразованием приравниваются лжи. Подобным образом поступают при реализации систем логического программирования типа *Prolog*, однако в информационной семантике весьма существенно различать достоверную ложь и неопределенность результата, ведущих к разным действиям и последствиям. Далее нам понадобится еще одна модификация функции Фреге, выделяющая неопределенности:  $Fru(0)=1$ , а при определенных  $x \in Bit$   $Fru(x)=0$ . Эта функция выражается через  $Fre(x)$ , и обратно, функция Фреге выразима через  $Fru(x)$ : легко убедиться, что  $Fru(x)=\neg(Fre(x)+Fre(\bar{x})) = \bar{Fre}(x) \cdot \bar{Fre}(\bar{x})$ ,  $Fre(x) = xFru(x)$ , поэтому в качестве минимального базиса трилогики можно взять три функции  $\{x|z, Fre(x), Fri(x)\}$  либо  $\{x|z, Fru(x), Fri(x)\}$ . Вторая функция минимального базиса устраняет синтаксические и семантические неопределенности, а третья функция вводит семантическую неопределенность.

### 5. Обращение логических функций. Тетралогия

Чтобы построить обратные функции двоичной и троичной логики с информационной семантикой, играющих заметную роль в задачах формализации логического вывода, диагностики, распознавания образов, необходимо расширить шкалу трилогики и ввести знак внешней неопределенности – знак киноль  $\square$ , определить его информационную семантику и правила преобразования совместно с другими логическими значениями. Эта необходимость обусловлена тем, что абсурд может возникнуть даже в случаях, когда все переменные принимают значения из шкалы  $Bit_{\square}$ , см. далее. Введение в логические шкалы квадратного нуля  $\square$  порождает троичные  $\{0, 1, \square\}$ ,  $\{1, \theta, \square\}$ ,  $\{0, \theta, \square\}$  и четверичную  $\{0, 1, \theta, \square\}$  шкалы и логики, операции и реляционные связки, их информационно-логическую семантику, зависящие от исходных объективных ситуаций и последствий логического вывода, которые и должна моделировать соответствующая многозначная логика.

Разнообразие ситуаций с внешней неопределенностью в общем случае неисчислимо. Обозначим произвольную противоречивую информационную ситуацию и ее результаты знаком  $\square_0$ , полагая, что при анализе можно представить возникший абсурд более конкретными и однозначно формализованными его представителями:  $\square_0 = \{\square, \square_1, \dots\}$ , которые описывают различные виды нарушений хода логического процесса, наличия в нем грубых ошибок в исходных данных, в формализации информационной задачи, ее априорике, содержащей абсурдные модельные соотношения, фатальные искажения промежуточных и конечных результатов. Вместе с тем могут быть и несущественные бессмыслицы, которые не влияют решающим образом на ход и итог логического вывода.

Рассмотрим две, в некотором смысле предельные, формализации абсурда: 1) максимальный киноль  $\square$  описывает фатальную ошибку, искажающую все последующие результаты, полученные по искаженному знанию – это случай фатальной ошибки и абсурда; 2) минимальный киноль  $\square_1$  описывает несущественную, исправимую бессмыслицу значений слабоинформативных логических переменных, которые можно исключить из логических функций, если им присвоено значение исправимого абсурда  $\square_1$ . Пожалуй, основной в информационно-логических процессах является первая формализация, используемая в **тетралогии** со шкалой  $\{1, 0, \theta, \square\}$ , вторая имеет более скромные приложения. Итак, в тетралогии вводятся следующие правила преобразования максимального абсурда  $\square$ : если на входе  $n$ -арной операции встречается хотя бы один знак  $\square$ , то результату присваивается этот знак:  $\bar{\square} = Fre(\square) = Fri(\square) = \square$ ,  $a + \square = a \cdot \square = \dots = \square$ , тогда часть логического процесса и его результатов, “пораженных” фатальными ошибками, будет помечена знаком киноль и в последующем может быть исправлена. Логические преобразования тетралогии определяются **принципами поглощения киноля  $\theta$  и воспроизведение киноля  $\square$** .

Правила оперирования несущественным противоречивым неопределённым значением  $\square_1$  выражает принцип сокращения минимального абсурда, в соответствии с которым логическое сложе-

ние  $a + \square_1 = a$ , логическое умножение  $a \cdot \square_1 = a$ ,  $\bar{\square}_1 = \square_1$ ,  $Fre(\square_1) = Fri(\square_1) = 0$ , на другие операции трилогики эти правила переносятся, используя выражения операций в дизъюнктивной форме:  $\square_1 \rightarrow a = a$ ,  $a \rightarrow \square_1 = \bar{a}$ ,  $a - \square_1 = a$ ,  $\square_1 - a = \bar{a}$ ,  $a \leftrightarrow \square_1 = a \oplus \square_1 = 1$ ,  $a \downarrow \square_1 = a \downarrow \square_1 = \bar{a}$ . Вместо этих правил при сокращении  $\square_1$  используется также преобразование минимального абсурда во внутреннюю неопределённость;  $\square_1 \rightarrow \theta$ , когда анализ причин возникших противоречий допускает такую возможность.

Формальные четверичные логики, не ограниченные информационной семантикой, имеют гораздо большее разнообразие операций, чем троичные логики: число унарных четверичных операций равно 256, а бинарных операций более  $4 \cdot 10^9$ . Принципы поглощения, воспроизведения, сокращения неопределённостей вводят семантические связи между логическими операциями и существенно ограничивают их число, необходимое для построения адекватных логических моделей информационных ситуаций.

Покажем, что в тетралогике со шкалой  $\{1, 0, \theta, \square\}$  выразимы с сохранением объективной информационной семантики обратные операции трилогики, а значит, и классической логики. Ограничимся обращением функций  $y=f(x)$  одной переменной,  $n=1$ . Обратная функция  $\hat{x} = f^{-1}(y)$  восстанавливает, если это возможно, вход  $x = \hat{x}$  по выходу  $y$  и априорике  $J_{xy}$  либо указывает на невозможность точного обращения:  $x \neq \hat{x} \in \{\theta, \square\}$ . Унарные операции тождественного преобразования  $y=f_1(x)=x$  и базисного отрицания  $y=f_2(x)=\bar{x}$  в четверичной шкале  $x, y \in \{1, 0, \theta, \square\}$  обращаются точно:  $\hat{x} = x$ ,  $f_1^{-1}(y) = f_1(x) = x$ ,  $f_2^{-1}(y) = \bar{f}_2(x) = \bar{\bar{x}} = x$ , так как  $\bar{\bar{0}} = 0$ ,  $\bar{\bar{1}} = 1$ ,  $\bar{\bar{\theta}} = \theta$ ,  $\bar{\bar{\square}} = \square$ . Функция Фреге  $y=Fre(x)$  точно обратима при  $x=y=1$  и  $x=y=\square$ , но при  $y=0$  возникает внутренняя неопределённость обращения:  $\hat{x} = \theta$  при  $x=0$  и  $1$ , а при  $y=\theta$  возникает противоречие этого значения априорике функции Фреге:  $y \in Bit$ , поэтому  $Fre^{-1}(\theta) = \square$ , т.е.  $\hat{x} = \square$  при  $y = \theta$  – входной абсурд, и при  $y = \theta$  – противоречие частичности обратной функции. Подобным образом строятся обращения  $Fri(x)$ ,  $Fru(x)$  и константных функций трилогики  $0(x)$ ,  $1(x)$ ,  $\theta(x)$ , перенесенных в тетралогика в соответствии с принципом воспроизведения квина, сведенные в таблицу 2.

Таблица 2

$y$	$\hat{x}=f^{-1}(y)$								
	$f_1^{-1}$	$f_2^{-1}$	$Fre^{-1}$	$Fri^{-1}$	$Fru^{-1}$	$0^{-1}(y)$	$\theta^{-1}(y)$	$1^{-1}(y)$	$\square^{-1}(y)$
$0$	<u><math>0</math></u>	<u><math>1</math></u>	$\theta$	$0$	$\theta$	<u><math>0</math></u>	$\square$	$\square$	$\square$
$\theta$	<u><math>\theta</math></u>	<u><math>\theta</math></u>	$\square$	<u><math>1</math></u>	$\square$	$\square$	<u><math>\theta</math></u>	$\square$	$\square$
$1$	<u><math>1</math></u>	<u><math>0</math></u>	<u><math>1</math></u>	$\square$	<u><math>\theta</math></u>	$\square$	$\square$	<u><math>1</math></u>	$\square$
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

Случаи точного обращения и восстановления входа  $x = \hat{x}$  операций трилогики и классической логики отмечены подчеркиванием. Последняя строка и столбец определяют ситуации тетралогии, функция  $\square(x)$  есть константная функция  $\sim$  “всё абсурд”, ее обращение характеризуется полной четверичной синтаксической неопределенностью:  $\theta_4 = \{1, 0, \theta, \square\}$ .

Бинарные операции трилогики и функции большого числа аргументов обращаются по одному из аргументов при заданных постоянных значениях других аргументов:  $y=f(x, a_1, a_2, \dots)$ . Обратные логические функции представляют собой простейшие модели решений систем неопределенных логических уравнений. Логическое сложение  $y=a+x$  есть частично обратимая функция  $\hat{x} = f^{-1}(y, a)$ : при  $a=0$  сложение точно обратимо  $y = x = \hat{x}$ , при  $a=1$  и  $y=1$  аргумент  $x$  может принимать любое троичное значение, поэтому результат обращения  $\hat{x} = \theta$ , соответствующий полной неопределенности  $\theta_3$ , а если  $y \neq 1$ , то возникает противоречие этого факта априорике логического сложения:  $\hat{x} = \square$ . При  $a=\theta$  аналогичный абсурд возникает при значении  $y=0$ , а если  $y=\theta$ , то неопределенность обращения  $\hat{x} = \theta$  соответствует синтаксическому отрицанию  $\tilde{1} = \{0, \theta\}$ , точное обращение  $\hat{x} = x = 1$  имеет место при  $y=1$ . Подобным образом строятся обратные логические операции всех бинарных операций. В таблице 3 представлены обратные функции сложения, умножения, антиимпликации с неизвестной посылкой (в доказательствах от противного), импликации с неизвестным заключением.

Таблица 3

$y$	$\hat{x}=(a+x)^{-1}$			$\hat{x}=(ax)^{-1}$			$\hat{x}=(x \rightarrow a)^{-1}$			$\hat{x}=(a \rightarrow x)^{-1}$		
	$a=0$	$a=\theta$	$a=1$	$a=0$	$a=\theta$	$a=1$	$a=0$	$a=\theta$	$a=1$	$a=0$	$a=\theta$	$a=1$
$0$	<u><math>0</math></u>	$\square$	$\square$	$\theta-\theta_3$	<u><math>0</math></u>	<u><math>0</math></u>	<u><math>1</math></u>	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	<u><math>0</math></u>
$\theta$	<u><math>\theta</math></u>	$\theta-\tilde{1}$	$\square$	$\square$	$\theta-\tilde{0}$	<u><math>\theta</math></u>	<u><math>\theta</math></u>	$\theta-\tilde{0}$	$\square$	$\square$	$\theta-\tilde{1}$	<u><math>\theta</math></u>
$1$	<u><math>1</math></u>	<u><math>1</math></u>	$\theta-\theta_3$	$\square$	<u><math>1</math></u>	<u><math>1</math></u>	<u><math>0</math></u>	<u><math>0</math></u>	$\theta-\theta_3$	$\theta-\theta_3$	<u><math>1</math></u>	<u><math>1</math></u>

Случаи точного обращения подчеркнуты, двоичная семантическая и синтаксическая неопределенность  $\theta_2 = \theta$  получается абстракцией от иерархических троичных синтаксических неопределенностей обращения:  $\theta_3, \tilde{0}, \tilde{1}$ . Последние три столбца содержат строгое табличное определение правила модус поненс:  $y, a \mid - \hat{x}$ , учитывающего различия базисного и синтаксического отрицания неопределенностей.

### 6. Трилогика в решении головоломки «о трех мудрецах»

Трилогика и тетралогика находят приложения при описании размытых структур, частичных графов и частичных бинарных отношений, при моделировании рассуждений с неполной информацией. В качестве примера использования трилогики приведем решение задачи о трех мудрецах, которую Дж.Маккарти использовал для тестирования моделей знаний [6,13]. Эта задача в двоичной аксиоматике имеет весьма сложную формализацию. Она ставится так: король, желая оценить интеллектуальные способности советников-мудрецов  $M_1, M_2, M_3$ , посадил их напротив друг друга и нарисовал на лбу каждого мудреца пятно либо белого ( $x_i=1$ ), либо черного ( $x_i=0$ ) цвета и добавил, что хотя бы одно пятно из трех белое, а мудрецам необходимо угадать цвет собственного пятна  $x_i$ , зная цвета  $x_j, x_k$  двух других пятен и предшествующие ответы  $\hat{x}$  мудрецов, например, при  $x_1=x_2=x_3=1$   $M_1$  ответил “не знаю”  $\sim \hat{x}_1 = \theta$ ,  $M_2$  тоже ответил “не знаю”  $\sim \hat{x}_2 = \theta$ , тогда  $M_3$  решил, что его пятно белое,  $\hat{x}_3 = 1 = x_3$ .

Далее полагаем, что король и мудрецы действуют точно, без ошибок, обмана, сговора и могут быть представлены объективированными субъектами – системами *obsubj*, которые имеют

безупречные сенсоры (зрения и слуха):  $y_1=A_1(M_2,M_3)=(\theta_1,x_2,x_3)$ ,  $y_2=A_2(M_1,M_3)=(x_1,\theta_2,x_3,\hat{x}_1)$ ,  $y_3=A_3(M_1,M_2)=(x_1,x_2,\theta_3,\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ , и рефоры  $\hat{x}_1=B_1(y_1, J)$ ,  $\hat{x}_2=B_2(y_2, J)$ ,  $\hat{x}_3=B_3(y_3, J)$ , построенные в системах *obsubj*  $M_1, M_2, M_3$  по критериям предельной точности и определенности ответов мудрецов  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ ;  $J$  – априорная информация, используемая мудрецами наряду с данными наблюдений  $y_i$  и содержащая сведения о критериях, правилах поведения мудрецов, исходной неопределенности их состояний  $x=x_1x_2x_3$ , заданной королем,  $J_x=\{001, 010, \dots, 111\}$  – семь информационных ситуаций, а восьмую,  $x=000$ , король исключил из априорике задачи.

Решение представлено в таблице 4, неопределенность ответа обозначена в ней прочерком.

Таблица 4

$N$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	Формулы трилогики
1	0	0	1	–	–	1	$\hat{x}_1 = B_1(y_1) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \theta \geq x_1$ , $\hat{x}_2 = B_2(y_2) = \bar{F}ri(x_3) \cdot \bar{F}re(\hat{x}_1)$ , $\hat{x}_3 = B_3(y_3) = \bar{F}ru(x_2) \in Bit$ .
2	0	1	0	–	1	0	
3	0	1	1	–	–	1	
4	1	0	0	1	0	0	
5	1	0	1	–	–	1	
6	1	1	0	–	1	0	
7	1	1	1	–	–	1	

Пусть мудрецы учитывают только визуальную информацию  $x_i x_j$ , тогда каждый из них восстанавливает состояние лишь одной ситуации из семи, это ситуации 1, 2, 4 с двумя нулями в векторе  $x$ : если мудрец видит два черных пятна, то его пятно, согласно априорике  $J_x$ , белое,  $\hat{x}_i=1=x_i$ . Так и поступил  $M_1$ , построив наилучший из возможных в трилогике рефор  $\hat{x} = B_1(y_1) = A_1^{-1}(y_1) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \theta_1$  - это обращение по  $x_1$  сенсорной функции  $y_1=A_1(x)$  трех двоичных аргументов  $x=(x_1x_2x_3)$  при априорных ограничениях  $J_x$ . Оставшиеся шесть ситуаций разделяются мудрецами на три пары по их визуальной информации  $x_i x_j$ : 01, 10, 11, а третье значение в парах неизвестное:  $x_k=\theta_k=\{0,1\}$ ,  $x \in \theta_1 x_2 x_3$  для  $M_1$ ,  $x \in x_1 \theta_2 x_3$  для  $M_2$ ,  $x \in x_1 x_2 \theta_3$  для  $M_3$ . Чтобы различить ситуации в выделенных парах и устранить неопределенность, если это возможно, мудрецы  $M_2$  и  $M_3$  привлекают фактическую апостериорную информацию  $\hat{x}_1$  и  $\hat{x}_2$ , полученную путем размышлений мудрецами  $M_1$  и  $M_2$ . Для этого система  $M_2$  строит модель поведения системы  $M_1$ , а система  $M_3$  строит модели двух зависимых источников информации: модель  $M_1$  с учётом фактических данных  $M_3$  и модель  $M_2$ , которая включает модель  $M_1$  внутри модели  $M_2$  и описывает зависимости апостериорных неопределённостей. Рефор  $B_2$  представим двумя алгоритмами: первый  $B_{22}(x_1, x_3)$  разбивает 7 ситуаций на 4 класса по  $x_1 x_3$  – визуальным данным  $M_2$ : строки 2, 1 и 3, 4 и 6, 5 и 7, второй алгоритм  $B_{21}(\hat{x}_1)$  есть обращение моделей  $M_1$  – сенсора  $A_1$  и рефора  $B_1$  в системе  $M_2$ , служащих для различения ситуаций в выделенных парах по значению ответа  $\hat{x}_1$ . В таблице 4 ответ различен только в паре (4,6):  $\hat{x}_1=1 \sim$  “если  $M_1$  знает  $x_1$ , то  $x_2=0$ ” – строка 4;  $\hat{x}_1=\theta \sim$  “если  $M_1$  не знает  $x_1$ , то  $x_2=1$  – строка 6”. Аналитическая аппроксимация рефора  $B_2(y_2)$  есть функция  $\hat{x}_2 = \bar{F}ri(x_3) \cdot \bar{F}re(\hat{x}_1)$  – информация о переменной  $x_1$  для  $M_2$  является избыточной. Аналогично строится рефор  $B_3(y_3)$ , его точная аппроксимация ещё проще:  $\hat{x}_3 = \bar{F}ru(\hat{x}_2)=x_3$  – полное однозначное решение задачи системой  $M_3$  во всех ситуациях, получаемое только по ответу  $M_2$ , другую фактическую информацию третий мудрец может не учитывать, не слушать  $M_1$ , не смотреть на  $M_1$  и  $M_2$  или быть слепым, но, услышав ответ  $M_2$  “не знаю” решить, что  $x_3=1$ , а при ответе “знаю,  $\hat{x}_2=1$  (либо  $\hat{x}_2=0$ )”, ответить  $\hat{x}_3=0$ .

Полученное решение переносится на произвольное число  $n \geq 1$  мудрецов: при  $n=1$   $\hat{x}_1=1$  по априорике  $J_x$ , при  $n=2$  решение выделено в правом нижнем углу табл. 4, при  $n \geq 2$   $\hat{x}_n = \bar{F}ru(\hat{x}_{n-1})=x_n$ , например, для четырех мудрецов в ситуации  $x=x_1x_2x_3x_4=0101$ ,  $y_1=\theta_1 101$ ,  $y_2=0\theta_2 01$ ,  $y_3=01\theta_3 1$ ,  $y_4=010\theta_4$ ,  $\hat{x}_1=\theta_1$ ,  $\hat{x}_2=\theta_2$ ,  $\hat{x}_3=\theta_3$ ,  $\hat{x}_4=1=\bar{F}ru(\hat{x}_3)$ , так как  $\hat{x}_3=\hat{x}_2$  и  $M_4$  знает ( $M_3$  тоже знает), что  $M_2$  не знает свое состояние, но неопределенность  $\hat{x}_2=\theta$  возможна для  $M_2$  только при  $x_4=1$ . Увеличение числа мудрецов на 1 почти удваивает число возможных ситуаций  $2^{n+1}-1$  и число источников

информации, а исходная неопределенность состояния  $M_k$  остается неизменной: энтропия в  $l$  бит, альтернат в  $l$  альт. Число правильно и однозначно распознаваемых ситуаций мудрецом  $M_k$  равно  $2^k - 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Следующие усложнения и обобщения задачи о мудрецах состоят в учете объективных и преднамеренных ошибок сенсоров, рефоров, априорики, веры и сомнений мудрецов, их субъективных целей и критериев, характерных при моделировании социальных явлений, более адекватно представимых в формализме частотной логики [7,11]. В частности, введение частотных связей между логическими переменными порождает в ообщем случае более точные дробные меры неопределенности состояний мудрецов.

### 7. Частотная и многозначные логики

Представляет интерес сопоставить семантику трилогики и частотной логики, имеющей произвольное число значений истинности в вещественном интервале  $[0,1]$ , зависящих от множества  $U$  – универсума информационных ситуаций. Если в  $U$  нет опровергающих примеров логическим формулам  $a=0$  или  $b=1$ , то эти значения совпадают для двоичных, троичных и частотных оценок истинности логических переменных, при наличии опровержений и внутренних противоречий совокупности источников информации возникает неопределенность  $a=\theta$ , соответствующая **строгой трилогике**: частотная истинность формулы  $a$  есть  $\underline{a} = \frac{N_a}{N}$ , троичное значение  $a=\theta$  в трилогике

соответствует частости истинности  $0 < \underline{a} < 1$ ,  $N_a$  – число ситуаций в  $U$ , в которых  $a(obj)=1$  из общего числа  $N=|U|$ ,  $0 < N_a < N$ . В информационной практике имеет место **аппроксимационная трилогика** с приближенными значениями истинности:  $a=1$  при  $\underline{a} \geq 1-\Delta$ , ложности  $a=0$  при  $\underline{a} \leq \Delta$  и неопределенности  $a=\theta$  при  $\Delta < \underline{a} < 1-\Delta$ ,  $\Delta > 0$  – граничное значение риска или доверия  $1-\Delta$ .

Шкалу истинности частотной логики можно разбить на любое число  $k \geq 2$  интервалов и получить  $k$ -значные аппроксимационные логики, например, четверичную логику,  $k=4$ , со значениями истинности:  $1 = \{\underline{a} \geq 1-\Delta\} \sim$  “почти истина”,  $2 = \{0.5 < \underline{a} < 1-\Delta\} \sim$  “скорее истина, чем ложь”,  $3 = \{\Delta < \underline{a} < 0.5\} \sim$  “скорее ложь, чем истина”,  $4 = \{\underline{a} \leq \Delta\} \sim$  “почти ложь” или  $6$ -значная логика со значениями:  $1 = \{\underline{a} < 0.05\} \sim$  “практически невозможно”,  $2 = \{0.05 \leq \underline{a} < 0.2\} \sim$  “возможно”,  $3 = \{0.2 \leq \underline{a} < 0.5\} \sim$  “вероятно”,  $4 = \{0.5 \leq \underline{a} < 0.8\} \sim$  “весьма вероятно”,  $5 = \{0.8 \leq \underline{a} < 0.95\} \sim$  “почти достоверно”,  $6 = \{\underline{a} \geq 0.95\} \sim$  “практически достоверно”. Логическое сложение и умножение в  $k$ -значных аппроксимационных логиках обычно определяются в виде максимума и минимума частости аргументов, точно также эти операции определяются в нечеткой логике Заде, однако, как показано в работе [14], это в известном смысле наихудшие определения многозначных логических операций, привносящие дополнительные ошибки, относительные уровни которых могут достигать 100% частости или редкости аргументов, поэтому их лучше заменить определениями из частотной логики и оценить потери точности от дискретизации непрерывной логической шкалы и от неучёта частотных зависимостей между аргументами. В подобных дискретных шкалах знак внутренней неопределённости  $\theta$  трилогики приобретает несколько, более конкретных, значений истинности и вариативности, а, добавляя в логическую шкалу знак внешней неопределённости  $\square$ , получаем возможность формального описания абсурдных противоречий логического процесса.

### Заключение

Язык любой логики ограничен и не универсален. Многозначные логики есть постепенный переход от двоичной классической логики к более сложным математическим и информационным моделям систем и технологий. Из всех мыслимых и фактически созданных логик особое место занимают логики, объективно описывающие состояния информационно-материальной реальности и содержащие собственный инструмент строгой оценки истинности и неопределённости логического вывода в рамках однозначно определенного формализма – прежде всего это классическая логика, отвергающая все недоопределенные и переопределённые значения переменных, оставляя их обработку неформализованной части естественного интеллекта, затем её обобщения на неопределённые ситуации – трилогика, тетралогика, частотная логика и их комбинации, позволяющие учесть ошибки формализации, нарушения гипотезы двоичности Хризиппа, частичность и многозначность сенсоров и рефоров информационных систем и технологий. Если частотная логика предполагает при реализации сложные машинные вычисления, то трилогика и тетралогика могут

найти применение не только в упрощённых алгоритмах автоматизированных систем, но и в процессах естественного мышления и языка. Дана Скотт сетовал, что “по меньшей мере четыре раза в год кто-нибудь преподносит новую логику”, и еще: “покажите мне действительно пригодную для работы трехзначную логику” [1]. В другой работе [15] он замечает: “Перед тем как вы примете многозначную логику как долгожданного брата, попробуйте понять, что могут означать дробные истинностные значения. И имеют ли они какой-либо смысл? Каково концептуальное подтверждение “промежуточных значений”?”. Эти вопросы и сомнения высказывают многие авторы, ответы на них содержатся в [7,11] и в данной статье.

### Список литературы

1. Семантика модальных и интенциональных логик. –М.: Прогресс, 1981. –424 с.
2. Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. –М.: Прогресс, 1981. –271с.
3. Меськов В.С. Очерки по логике квантовой механики. –М.: МГУ, 1986. –144 с.
4. Bolc L., Borowic P. Many-valued logics: Teoretical foundations. Vol. 1, Berlin, 1992.
5. Карпенко А.С. Многозначные логики, сер.Логика и компьютер. Вып.4, –М.: Наука, 1997. –223с.
6. Логический подход к искусственному интеллекту: от модальной логики к логике баз данных/А.Тейз, П.Грибомон, Г.Юлен и др. –М.: Мир, 1998. –494 с.
7. Зверев Г.Н. Частотная логика – альтернатива классической логике в новых информационных технологиях. –Информационные технологии, № 11, 1998, С. 2-10.
8. Зверев Г.Н. Модели неопределенностей и фундаментальные критерии информатики. – Информационные технологии, № 6, 2000, С. 2-10.
9. Lukasiewicz J. Logika trojwartosciowa. Ruch Filozoficzny. r. V., nr. 9, Lwow, 1920.
10. Post E.L. Introduction to a General Theory of Elementary Propositions. Amer. Journ. of Math., v. XLIII, N3, 1921.
11. Зверев Г.Н. Основания теоретической информатики. Разд. 1-9. –Уфа, УГАТУ, 1995-99.
12. Тьюринг А. Может ли машина мыслить ? –М.: ГИФМЛ, 1960, 112 с.
13. McCarty J., Sato M., Hayashi T., Igarashi S. On the Model Theory of Knowledge. Standart Art.Int.Lab. MemoAIM. –312, Standart University, 1978.
14. Зверев Г.Н. Оценка точности логических приближений и границ применимости классической и не классических логик в системах моделирования и принятия решений – Информационные технологии, № 12, 1999, С. 12-19.
15. Scott D. Does many-valued logic and future contingencies – Philosophy of logic. Oxford, 1976, p. 64-74.