Г.Н. Зверев

Неклассические объективные логики с информационной семантикой

Информационный подход к логическим категориям и процессам позволяет более полно описать их семантику и включить в строгие формализмы логики общезначимые модели неопределенностей.

Объективация языка науки предполагает экспликацию научных понятий, однозначно согласованную с источниками и преобразователями информации при условии, что последние являются подконтрольными и удовлетворяют критериям точности и достоверности получаемых новых знаний. Данная статья является развитием работ [1,2,3] и содержит уточнения семантики логических формализмов.

Классическая и математическая логика

Логика как абстрактная наука о мышлении, о способах поиска новых знаний и доказательствах их истинности в своих основаниях содержит объективные и субъективные элементы. Субъективизм логических конструкций имеет несколько источников: естественно-языковая среда, в которой определены и функционируют понятия логики и решаемой проблемы, человеческая интуиция, управляющая логическими процессами, и др. Более ста лет назад классическая логика была частично формализована и возникла математическая логика с несколько иными элементами субъективизма.

В традиционной классической логике на содержательном, не вполне формализованном интуитивном уровне в среде естественного языка рассматриваются основные мыслительные объекты, операции и их концептуальные модели:

– образование понятий, суждений, рассуждений; оценка их истинности или ложности;

– абстрагирование – конкретизация, обобщение – специализация;

– систематизация, классификация знаний;

– анализ (разбиение, декомпозиция) – синтез (соединение, композиция) материальных и идеальных явлений;

– формализация (дефиниция, экспликация) – интерпретация, поиск или конструирование прообраза формализма;

– индукция – дедукция;

– аналогия, правдоподобие, оценка модальностей (характеристик) знания;

– причинно-следственный анализ;

Работы по объективации и формализации этих операций ведутся не одно столетие, из последних попыток, в первой половине 20 века, отметим искусственный “идеальный язык” Л. Витгенштейна как обобщение языка математической логики. С появлением информатики исследования перечисленных выше моделей и операций выделились из логики в самостоятельные научные направления. В математической логике абстрагируются от значительной части мыслительных процессов, перечисленных выше, от их целевой ориентации и способов управления ими, выполняемых на уровне математической интуиции естественного интеллекта, и выделяют строго формализованную часть математического мышления, представленную в идеальной знаковой среде, не подверженной неконтролируемым внешним воздействиям.

Математизация логики

Математические модели классической логики могут иметь многообразные формы: арифметические, алгебраические, геометрические, аксиоматические представления. Начнем с арифметизации логики и ее алгебраизации. Для этого необходимо ввести константы и переменные логических систем. Константы и их множества различных типов есть однозначно определенные элементы – “индивиды” и их возможное разнообразие, а переменные есть произвольные представители из этих множеств, различающиеся своим типом и значением.

Арифметизация двоичных логических переменных состоит в переводе их качественных, нечисловых значений в количественную числовую шкалу, содержащую всего два числа $\{d_1, d_2\}$ – это **дуальная** числовая шкала с произвольными числами d_1 и d_2 , скажем, $d_1 = +1$, соответствующее значениям “да” и “истина”, $d_2 = -1$ для значений “нет” и “ложь”, впрочем, соответствия между дуальной, логической и номинативной шкалами могут быть любыми. Наиболее простая, семантически и исторически обоснованная арифметизация логики получается в битовой шкале $Bit = \{0,1\}$, семантика которой легко переносится на объективные неклассические логики, см. далее.

Битовая арифметика и алгебра начинается с переноса операций натуральной арифметики в двоичную шкалу $\{0,1\}$ с учетом требований однозначности и замкнутости битовых операций, не выводящих результат операции из двоичной шкалы (третьего значения не дано), а также с определения их семантики, логического смысла операций. Натуральное сложение $0+0=0$, $1+0=0+1=1$ без изменений переносится в битовую арифметику, а сумма $1+1=2$ выводит результат из шкалы $\{0,1\}$, поэтому в битовой арифметике можно определить два вида сложения единиц с результатами 1 и 0: первое называется логическим сложением или дизъюнкцией: $1+1=1$, а второе – сложением по модулю 2 или дифференцией: $1\oplus1=0$, $0\oplus0=0$, $0\oplus1=1\oplus0=1$. Битовое вычитание определяется так: $0-0=0$, $1-0=1$, $0-1=0$, $1-1=0$ и интерпретируется в дентовой семантике как изъятие объекта из множества, если он там есть.

Битовое умножение (конъюнкция) совпадает с натуральным: $0\cdot0=0\cdot1=1\cdot0=0$, $1\cdot1=1$. Битовое деление $0/0=1$, $0/1=0$, $1/0=1$, $1/1=1$ интерпретируется заменой предельной истины 1 достижимой (почти бесконечно большой) точностью – гиперчислом ", тогда 0/" = 0, "/0 = ", "/" = 1, а в отношении $0/0=1$ в числителе и знаменателе стоит константа – натуральный ноль, которую можно сократить, т.к. числитель точно равен знаменателю. Битовое деление моделирует логическое следование, импликацию: «если знаменатель равен 1, то числитель равен 1». К четырем бинарным битовым логико-арифметическим операциям добавляется унарный минус: $-0=1$, $-1=0$, моделирующий отрицание (негацию).

Определенная тем или иным способом битовая арифметика порождает соответствующую ей алгебру введением битовых переменных – логических признаков $a, b, x, z, \ldots \in Bit$. В битовой алгебре, исходя из унарного минуса и бинарных операций ($+$, $-$, $\cdot$, $/$), легко выводятся их алгебраические свойства: $a+b = b+a$, $a-b \neq b-a$, деление есть отрицание вычитания и т.п.

Геометризация и аксиоматизация логики

Еще один путь объективации и математизации классической логики был предложен в 18 веке Л.Эйлером, способ, формально эквивалентный арифметико-алгебраическому подходу и позволяющий наглядно и убедительно представить свойства логических операций и связок, очевидные ограничения, логические зависимости между свойствами объектов предметики и свойствами связей между объектами и информационными ситуациями. Геометризация логики по Эйлеру состоит в представлении множества объектов или информационных ситуаций решаемой проблемы дискретным геометрическим универсумом, в котором свойства и связи классов объектов изображаются кругами Эйлера, см. далее.

Алгебраизация и геометризация классической логики послужили твердой основой создания объективной математической логики, моделирующей реальные свойства и связи внешнего мира мыслящего субъекта, если заданные множества объектов и отношения между ними адекватно описывают действительность. Математики XX века пошли в формализации дальше и создали различные аксиоматизации математической логики, отказавшись от некоторых законов логики, от определений и ясной семантики логических операций и связок, заменив их неявными определениями системой аксиом и правил вывода в надежде описать свойства произвольных бесконечных совокупностей математических объектов. Так, в законе двойного отрицания, тавтологии ($\bar{\bar{a}} = a$), равенство можно заменить логическим произведением двух импликаций ($\bar{\bar{a}} \to a$)·($a \to \bar{\bar{a}}$) – «если и только если», одна из которых считается аксиомой ($a \to \bar{\bar{a}}$), а другая ($\bar{\bar{a}} \to a$) – нет, для того чтобы запретить доказательства от противного.

Путь аксиоматизации логики прояснил некоторые зависимости между логическими свойствами, аксиомами, но поскольку всякая аксиоматизация неограниченно расширяет область интерпретации формализма и вносит в общем случае неконтролируемые семантические неопределенности и свободные абстракции, в аксиоматических логиках существенную роль стал играть субъективный элемент математического мышления и интуиции авторов аксиоматических систем, а в целом путь повальной аксиоматизации надолго задержал развитие объективных неклассических логик.

Информатизация логики

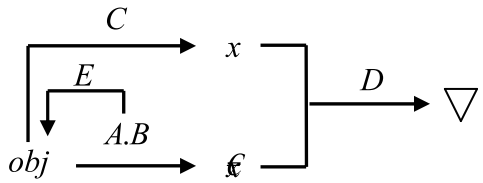
Объективная логика начинается с формализации источников фактических и априорных знаний, построения моделей наблюдений и средств обработки информации, преобразования знаний в двоичную шкалу различимости {да, нет} или {истина, ложь}, при этом субъективная сторона человеческого мышления и его слабо изученных механизмов исключается и заменяется внешним воспроизведением действий с реальными объектами и их знаковыми представлениями – символами логико-математического языка. Конструктивная модель суждения (высказывания, предиката) с информационной семантикой представляется в общем случае двумя процессорами объективированного субъекта: сенсором *A* и рефором *B*: $obj \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} \hat{x}$, это ориентированная цепочка источников и преобразователей знаний.

Сенсор *A* содержит средства наблюдения, измерения в виде органов чувств, рецепторов, датчиков, первичных и вторичных преобразователей сенсорной информации, которые при взаимодействии с исследуемым объектом *obj* или процессом вырабатывают эмпирические факты, результирующие знаки ощущений, наблюдений, измерений в виде информационного объекта $y=A(obj)$. Рефор *B* содержит средства обработки чувственной, измерительной информации в виде нейробиологических или вычислительных сетей, которые преобразуют информационный объект *y* в суждение $\hat{x} = B(y)$. Объединяя эти два этапа преобразования в одно общее преобразование, получаем схему, которая называется сенсфор = сенсор + рефор и обозначается в виде аппликации *A.B*: $obj \xrightarrow{A.B} \hat{x}$ или в скобочной записи суждение-функцию $\hat{x} = B(y) = B(A(obj)) = A.B(obj)$.

Подобное объединение позволяет не раскрывать структуру субъекта, когда в этом нет необходимости. Скажем, если объект *obj* является материальной вещью (снег), а суждение $\hat{x}$ является результатом чувственного восприятия (снег белый), то этап *B* обработки (вычислений, рассуждений) здесь отсутствует или находится в составе сенсора. Если же проблемный объект *obj* (число 10) является абстрактным объектом – понятием внутри субъекта, то отсутствует сенсор *A*, а сенсфор совпадает с рефором *B* (четность – нечетность): $\hat{x} = B(obj) =$"число 10 четное". В информационных ситуациях нередки случаи воздействия субъекта, информационно-материальной системы эффектором *E* на проблемный *obj*, в таких ситуациях сенсфор *AB* заменяется сенсформером *ABE*.

Выходная шкала сенсфора в логическом процессоре имеет только два номинативных значений белый – небелый, четный – нечетный, принадлежит $\in$ – не принадлежит $\overline{\in}$ данному множеству объектов и т.п. Для всех подобных случаев вводится обобщенная двоичная номинативная шкала: да – нет, в которую переводятся значения всех конкретных сенсфоров субъекта.

Чтобы оценить истинность или адекватность суждений субъекта в теоретической информатике, вводится еще два оператора: аккуратор *C* и адекватор *D*, и в результате получается конструктивная модель суждения *ABCD*, которая называется **схемой косвенного обращения (СКО)** или **граф инверсий:**



Аккуратор *C* есть модель идеального субъекта, суждения которого $x = C(obj)$ признаются непреложной истиной. В древности такой человек назывался оракул, пророк, он излагал истины от имени высшего существа. В информатике аккуратор *C* есть целевой оператор, модель прецизионный или абсолютно точной системы, см. гл. 9.

Адекватор D сравнивает суждение $\hat{x}$ субъекта с истинным суждением аккуратора x и присваивает ему меру адекватности $\nabla = D(\hat{x}, x)$, одно из двух истинностных значений: при совпадении $\hat{x}$ и x их адекватность ∇ = истина, в противном случае при $\hat{x} \neq x$ мера истинности ∇ = ложь. Значение истинности ∇ является функцией пяти аргументов – входного объекта и четырех моделей знаковой ситуации, изменение которых в схеме косвенного обращения может привести к изменению значения истинности: $\nabla = D(\hat{x}, x) = D(A.B(obj), C(obj)) = \nabla(A, B, C, D, obj)$

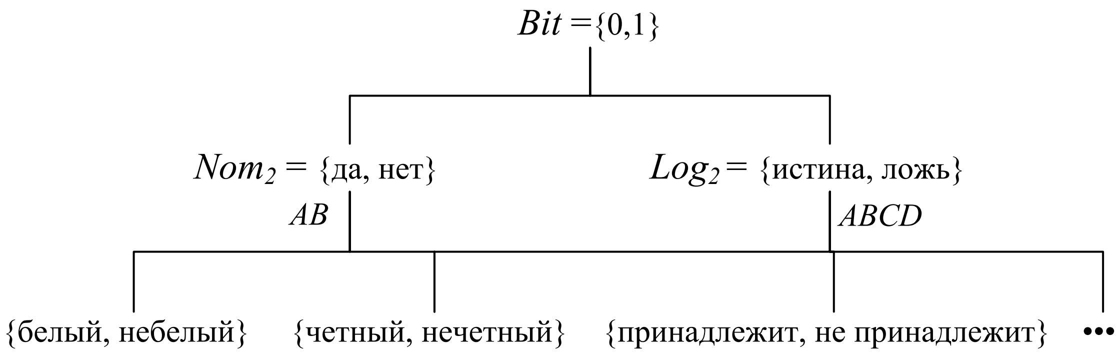
Сопоставляя эту функцию с определением предиката произвольной арности, можно заключить, что схема *ABCD* является структурной моделью предиката как оператора, иначе сказать, **предикатора**, который расщепляется на четыре оператора, каждый из них имеет свою особенную структуру. В самом деле, одноместный, унарный предикат *a(x)* = “снег бел” или “3 – четное число” аргументом имеет объект *x* = снег или число 3, а функцией – оценку истинности белизны или четности аргумента *x* = *obj*, т.е. $a = \begin{pmatrix} C \\ AB \end{pmatrix} D$ в структурной формуле схемы косвенного обращения, которую для простоты запишем в одну строчку: *a=ABCD*, а при воздействии эффектором *a=ABCDE*.

Иерархия шкал классической логики

Исходные двоичные признаки и составные логические функции образуют иерархию абстракций: на нижнем уровне иерархии двоичные знания представлены внелогическими именами логических признаков и функций из терминосистемы предметной области, в такой же конкретной форме представляются и имена значений признаков, предикатов, скажем, размер предмета (имя признака или функции) может иметь значения {большой, малый}, эти значения вырабатывает соответствующий сенсфор размера тела.

На следующем уровне иерархии вводятся абстрактная номинативная шкала двоичных значений Nom_2 = {да, нет}, определяющая позитивную либо негативную форму представления знаний источника информации, а также абстрактные понятия произвольного логического признака, логической функции и соответствующего им произвольного знакового процессора, сенсфора (источника знаний). Знание на выходе реального источника информации ($\hat{\text{да}}$ или $\hat{\text{нет}}$) должно быть проверено, скажем, многократным сравнением с истиной (да или нет) либо убедится в правильном функционировании сенсфора, и знанию присваивается двоичная оценка в логической шкале Log_2 = {истина, ложь} на выходе адекватиного процесса. На верхнем уровне иерархии абстракций находится семантически нейтральная арифметическая битовая шкала {0,1}, в которой исчезают различия между позитивными и негативными оценками, между истиной и ложью, между внелогическими и логическими (истинностными) значениями признаков и функций. В формальной логике эти абстрактные понятия и шкалы совмещаются, скажем, да отождествляются с истиной, а нет – с ложью, что обычно затрудняет формализацию семантики логики и предметных областей.

Иерархию шкал классической логики представим древовидной структурой:



Неклассические логики с информационной семантикой

Логические понятия обычно считаются более фундаментальными, чем понятия предметных областей математики, естественных и технических наук. Отсюда делается как бы очевидный вывод, что определение логического понятийного базиса, конструирование и исчерпывающее объяснение составляющих его понятий невозможно выполнить, используя понятия более конкретных предметик, не попав при этом в порочный логический круг. Этот традиционный взгляд с развитием теоретической информатики подвергся глубокому критическому анализу и принципиальному уточнению. Прежде, чем подступиться к этой проблеме, необходимо выяснить, что конкретно не устраивает предметников и, прежде всего специалистов по автоматизации человеческой деятельности и информационным технологиям в формальном аппарате и смысловых конструкциях классической логики. Здесь мы выделим четыре основные позиции, по которым чаще всего возникают критические выпады в адрес современной логики и многочисленные попытки ее усовершенствования, обозначаемые общим термином: **неклассические логики**.

Первое критическое положение можно выразить так: неполная формализация семантики классической логики, в частности, базисного понятия истинности и его разновидностей – аристотелевой (экспериментальной, фактической) и формальной (теоретической, логической) истинности или ложности знаковых конструкций. Специалисты предметных областей обычно выделяют разные виды истинности и лжи, различные типы ошибок, им “тесно” в двоичной шкале истинности, а переходы в математических теориях к многозначным логикам и частично упорядоченным логическим шкалам происходят вообще с потерей первичного смысла истинности. Подобное наблюдается и в абстрактных формализмах математической логики и теории алгоритмов при замене понятия истинности далекими от него понятиями выводимости, доказуемости, разрешимости. В некоторых публикациях последних лет интерпретация понятия истинности по-прежнему объявляется не вполне ясной и недостаточно формализованной.

Второе основание быть неудовлетворенным современными логическими исчислениями и их семантикой состоит в предельной идеализации информационного процесса получения и преобразования данных и моделей, гипотетически или постулативно – свободного в математической логике от каких-либо искажений. Между тем информационная практика естественных, технических и гуманитарных наук имеет дело с реальными знаковыми ситуациями, весьма далекими от логико-математического идеала**.** Неадекватность формализации действительных информационно-логических процессов весьма затрудняет и ограничивает применение в автоматизированных системах логических методов, ведет к замене их эмпирическими, эвристическими приемами, которые хоть как-то учитывают искажения, неполноту, противоречивость и размытия знаний, данных и моделей.

Третий повод для критики классической логики, вытекающий из второго, состоит в том, что в отличие от многих других формализаций, логика не допускает приближенных решений и логических аппроксимаций, которые естественно напрашиваются в процессах с неполными, искажёнными и противоречивыми данными. В самом деле, ложь отрицает истину, да отрицает нет и антипод не может быть приближением, аппроксимирующим точное решение. С этими соображениями увязывается и наш последний критический тезис. Основной проблемой дедукции в рамках формализма классической логики считается комбинаторная сложность алгоритмов, экспоненциальный рост времени и памяти логических процессов при необходимом увеличении размерности задачи и числа альтернатив переборов, а именно в таких ситуациях решающую роль начинают играть приближённые решения и контроль их точности при допустимых искажениях данных и моделей.

В известных работах по неклассическим логикам предложено много способов и путей возможного расширения и усовершенствования классического формализма математической логики, получившие такие названия, как модальная, многозначная, индуктивная, вероятностная, правдоподобная, нечеткая и др. логики. К сожалению, эти попытки не достигли той универсальности, семантической ясности, объективности и определенности, которые присущи классической логике, а самое главное, в них отсутствует аппарат оценки и доказательства истинности, достоверности результатов, не определены условия и границы применимости предлагаемых формальных конструкций.

Выделим четыре существенных свойства информационной реальности, которые должны учитывать объективные неклассические логики, претендующие на общезначимость и строгие обобщения формализмов и семантики классической логики, в которых учитываются основные виды неопределенностей логических ситуаций: 1) ограниченная различимость материально-информационных объектов реальности информационными средствами; 2) неуниверсальность, частичность всех функций, реляций и других средств логики, информатики, живых субъектов, иными словами, необходимо учесть существование в действительности объектов и ситуаций, для которых они не применимы; 3) искаженность, отягощенность ошибками, погрешностями всех результатов наблюдений, теоретических моделей, субъектных представлений, фактических и априорных знаний; 4) наличие пограничных переходных состояний реальности, размытых границ, которые нельзя точно описать в двоичной однозначно определенной или многозначной шкале свойств объектов и их модальностей.

Модели этих четырех свойств информационной реальности позволяют учесть в неклассических логиках различные виды неопределенностей знаковых объектов и процессов. Первое свойство ведет к замене множеств сомножествами в дентовой и контовой логической семантике [2], второе свойство – к разделению внутренней и внешней неопределенности, третье свойство – к построению логических аппроксимаций, невозможных в классической логике, т.к. истина не может приближенно представлять ложь и наоборот. Четвертое свойство ведет к необходимости введения непрерывных числовых шкал оценок истинности с учетом разрешающей способности процессоров и точности исходной информации.

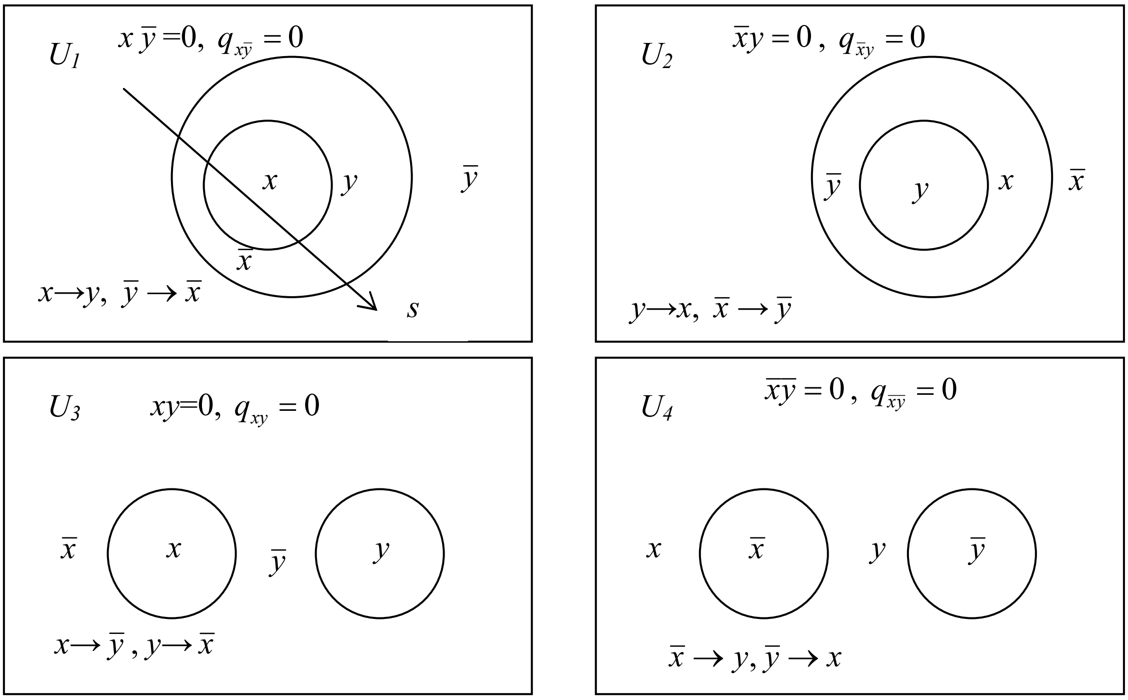
Конструктивный взгляд на логику с позиций теоретической информатики и системной реализации основан на отрицании логического априоризма мыслительных процессов, на представлении и выражении информационных процессов мозга как продуктов человеческого опыта, фактических проверок, закрепления законов логики в биологической и социальной истории людей путем обучения и передачи следующим поколениям в виде научных истин, которые подтверждаются в границах строго оговоренных идеализаций всеми накопленными знаниями и обладают статусом абсолютного доверия, не имеющих ни одного опровержения. Очевидно, экспериментальный, опытный характер мышления и законов логики завуалирован всем предшествующим развитием человечества и конкретным воспитанием, опытом отдельного человека.

Частость, логические и частотные связи

Смысл понятия частости состоит в количественной (числовой) характеристике доли объектов со свойством x=1 в общем объеме универсума объектов U. Этот объем принимаем за единицу измерения частости или за 100 процентов, тогда класс объектов с данным свойством составляет часть этого объема, характеризуемого величиной частости q_x. Другие названия частости – частота, относительная численность, обобщенная, детерминированная или случайная, вероятность, шанс, вероятие, правдоподобие, удельный объем и т.п. Чтобы "нейтрализовать" ложные исторически сложившиеся семантические связи со случайностью, с динамикой знакового процесса и его возможной неопределенностью в данной работе принят в качестве основного нейтральный термин "частость" и его оппозиция – "редкость".

В отличие от математической вероятности, имеющей динамическую семантику меры случайных событий, частость имеет статическую семантику состояния универсума в определенный момент времени и оценивает сложившееся разнообразие объектов универсума (сомножества) по двоичному свойству x независимо от механизма его образования – случайного (стохастического) или детерминированного и известного. В отличие от субъективной вероятности частость есть объективная характеристика реальности, если объективны источники информации. В отличие от геометрической вероятности частость есть нормированная мера дискретных систем объектов. В теории вероятностей Мизеса встречается также термин «частота», имеющий по преимуществу физическую семантику динамического характера.

Определим все виды логических и частотных связей между двумя переменными свойствами объектов *x(obj)* и *y(obj)*. Строгая логическая связь между двумя функциями x и y возникает в случаях, когда хотя бы одно из четырех значений распределения *q(x,y)* равно нулю. Представим эти случаи четырьмя диаграммами Эйлера:



В этих четырех мирах – универсумах $U_1 \div U_4$ – выполняются строгие правила логического вывода – модус поненс и модус толленс, гарантирующие истинность заключения при истинности посылок. Рассмотрим мир U_1, в котором для всех объектов справедливо логическое уравнение $x \cdot \bar{y} = 0$. Остальные случаи получаются из U_1 перестановкой x и y или их отрицаний.

Уравнение $x \cdot \bar{y} = 0$ можно представить в других эквивалентных ему видах: $x–y=0$, $\bar{x}+y=1$, $x \to y$, $\bar{x} \to \bar{y}$, значит, этому случаю соответствуют две равносильные импликации: если объект из U_1 обладает свойством x, то он обладает и свойством y, иначе, если он не обладает свойством y, то ему не присуще свойство x. Сделаем сечение универсума U_1 в направлении s, тогда битовые функции $x(s)$ и $y(s)$ удовлетворяют неравенству $x(s) \leq y(s)$ для любого объекта s в этом сечении и вообще для любого сечения универсума U_1:

В таблице истинности для универсума U_1 отсутствует один из четырех случаев, а именно, $x=1$, $y=0$, при котором импликация $x \to y$ и соответствующие ей логические выводы будут ложными, значит, эта логическая функция принимает истинное значение на всем универсуме U_1. Импликация $x \to y$ является частичной функцией логического вывода, действующая только в пределах круга x, внутри которого посылка истинна, а при ложности посылки x=0 вне круга x прогнозируемая логическая связь $x \to y$ исчезает.

Таким образом, во всех возможных четырех логических универсумах между свойствами x и y могут возникнуть четыре вида эквиальных логических связей в виде равенства или уравнения и равносильные им четыре пары – восемь импликативных (акцептуальных) связей типа неравенств $x \leq y$. Предположим, что x есть внутреннее ненаблюдаемое свойство, а y – наблюдаемое логически предопределенное его проявление, тогда имеем четыре прямые импликации: $x \to y$, $\bar{x} \to \bar{y}$, $x \to \bar{y}$, $\bar{x} \to y$, истинные, соответственно, в $U_1 \div U_4$ и описывающие решения прямых логических задач, и четыре обратные импликаций: $\bar{y} \to \bar{x}$, $y \to x$, $y \to \bar{x}$, $\bar{y} \to x$ для универсумов $U_1 \div U_4$, для которых решаются обратные задачи предсказания внутреннего свойства x по проявлению y, очевидно, с учетом частичности импликаций как частичных функций логического вывода.

К рассмотренным видам логических связей необходимо добавить всевозможные их сочетания, в которых одновременно выполняются два или три из следующих четырех логических уравнений: 1) $x\bar{y} = 0$ – прямое следование $x \to y$, 2) $\bar{x}y = 0$ – обратное следование $y \to x$, 3) xy=0 – несовместимость понятий x и y, 4) $\bar{x}\bar{y} = 0$ – несовместимость противоположных понятий $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Итак, прежде рассмотрим парные сочетания: (1+2) $x\bar{y} + \bar{x}y = 0$, решением этого уравнения является эквивалентность $x=y$, что совпадает с определением логической эквивалентности как произведения импликаций $(x \to y) \cdot (y \to x)$; (1+3) $x\bar{y} + xy = 0$, значит, $x(\bar{y}+y)=x=0$, класс объектов со свойством x=1 пуст, круг Эйлера в универсуме U_{13} отсутствует, а логическая связь выражает отношение понятия y с пустым понятием x, (1+4) $x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} = 0$, отсюда $(x + \bar{x}) \cdot \bar{y} = 0$, т.е. y=1, а эта логическая связь выражает отношение произвольного понятия x с универсальным понятием y, которое присуще всем объектам универсума U_{14}, (2+3) $\bar{x}y + xy = 0$, отсюда $y=0$, связь аналогична (1+3), но для другого свойства, (2+4) $\bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = 0$, отсюда x=1, подобно U_{14}, (3+4) $xy + \bar{x}\bar{y} = 0$, следовательно, $x = \bar{y}$ – это вторая эквивалентность с отрицанием, или в иной форме $\bar{x}=y$.

Теперь изучим случаи одновременного выполнения трех уравнений из четырех (1+2+3) $x\bar{y} + \bar{x}y + xy = 0$ – логическая связь между двумя пустыми понятиями $x=y$=0, (1+2+4) $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = 0$ – логическое отношение между двумя универсальными понятиями $x=y$=1, (1+3+4) $x\bar{y} + xy + \bar{x}\bar{y} = 0$ – отношение между пустым и универсальным понятием $x=0, y=1$, (2+3+4) $\bar{x}y + xy + \bar{x}\bar{y} = 0$ – аналогичная связь, но $x=1$, $y=0$. Система четырех уравнений (1+2+3+4), очевидно, противоречива, т.к. сумма произведений логических признаков и их частостей равна 1, а не 0.

Таким образом в классической и частотной логике различают следующие три типа логических связей между признаками – прямых и обратных, позитивных и негативных: 1) импликативности $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$, $x \rightarrow \bar{y}$, $\bar{x} \rightarrow y$ и т.д., 2) эквивалентности признаков $x=y$ или $x = \bar{y}$, следовательно $y = \bar{x}$, 3) вырожденные импликативные связи признаков с пустым $0 \rightarrow x$ или универсальным признаком $x \rightarrow 1$.

Логические зависимости между x и y разрушаются, если появляется хотя бы один объект, который приводит к отклонению от нуля соответствующих численностей N_{ij} и частостей $q_{ij} = \dfrac{N_{ij}}{N}$, $0 \le i,\ j \le 1$, и тогда возникает **логическая (функциональная) независимость**, но остается **сильная** или **слабая частотная** зависимость между x и y. На четырех диаграммах Эйлера этому факту соответствует пересечение кругов и возникает диаграмма общего положения, рассмотренная ранее при определении частостей. В таких случаях описанные выше равенства и неравенства нарушаются для некоторых объектов, и строгая логическая связь превращается в приближенную частотную связь, которую мы сейчас и определим.

Понятие частотной (статистической) связи как естественного обобщения логической зависимости и ее количественные меры в разных предметиках имеют много форм, представлений и названий: размытая, неопределенная, нефункциональная, многозначная, нечеткая связь, ковариационная, корреляционная, случайная статистическая зависимость (при этом обычно предполагается, что статистика полная, как в нашем случае, и в матрице представлены все объекты универсума, а если не все, то статистическая выборка считается представительной и вычисленные частости совпадают с универсальными значениями).

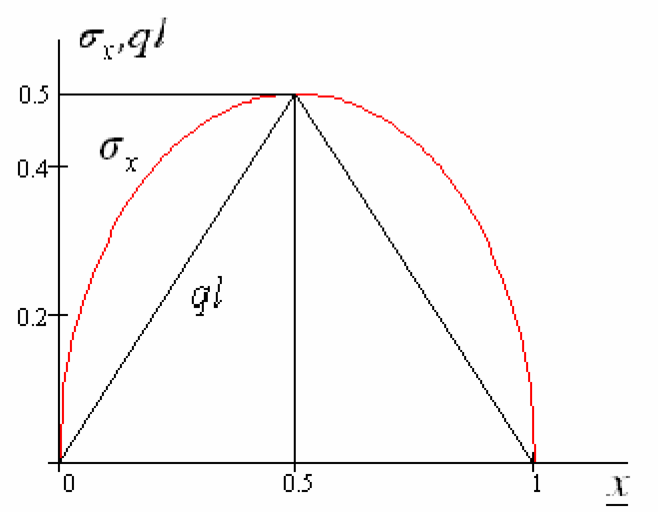
Итак, логическая связь есть предельный случай положительной и отрицательной частотной связи, соответствующий корреляции $|r_{xy}|=1$, при которой появляется возможность точного предсказания одного признака по известному другому признаку, а известная частотная связь открывает возможности уменьшения неопределённости и погрешности предсказания. Если же $r_{xy}=0$, то признаки независимы и не несут никакой взаимной информации, $q(x,y)=q(x)\cdot q(y)$.

Меры двоичной неопределённости. Частотная логика

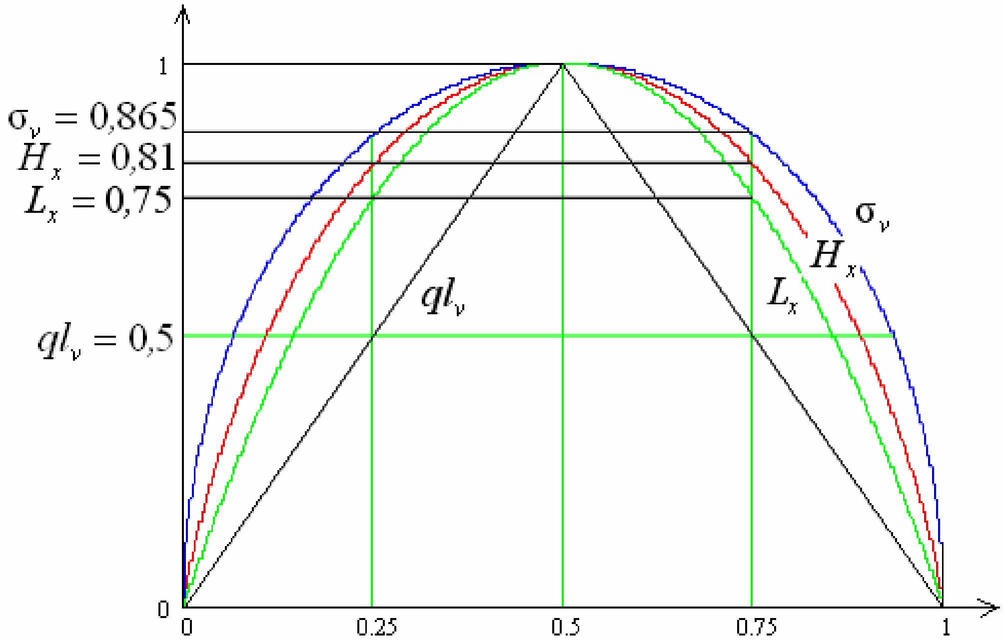
Конструктивные определения понятий частости и редкости логических признаков, мер частотной зависимости между двоичными свойствами объектов универсума служат основой для введения в логику числовой шкалы мер истинности (точности) или ложности (погрешности) логических формул. Как и в классической логике в частотной логике значения предметных значения предметных двоичных переменных (чётный – нечётный, большой – маленький и т.п.) переводятся в абстрактную номинативную {да, нет}, логическую {истина, ложь} и битовую {0,1} шкалу и выявляются положительные и отрицательные частотные и логические связи между признаками, а также независимые группы признаков. Может случиться так, что в универсуме ситуаций вообще отсутствуют логические связи между известными и искомыми признаками, а частотные связи обеспечат оценки неизвестных с весьма высокой частотной точностью.

Итак, в частотной логике помимо двоичной шкалы {0,1} логических признаков, высказываний, предикатов вводится шкала частотной истинности в замкнутом числовом интервале [0,1], это **меташкала**, выражающая метазнания – знания о знаниях, суждениях, утверждениях. Частотная истинность $\underline{x}$ логического признака $x \in Bit$ в числовой шкале одновременно несёт информацию и о степени неопределённости, изменчивости значения истинности: если $\underline{x}$ равно 0 или 1, то это полная определённость, при других значениях $\underline{x}$ мера неопределённости может быть вычислена в среднеквадратической шкале умножением частости $\underline{x}$ на редкость $1-\underline{x}$, $\sigma_x^2 = \underline{x}(1-\underline{x})$ – это дисперсия истинности, или среднеквадратическое отклонение σ_x, а также в шкале энтропии H_x либо альтернанта L_x.

Предельная неопределённость $\max\sigma_x \sim \max H_x \sim \max L_x$ наступает при $\underline{x} = \frac{1}{2}$ и равна $\sigma_m = \frac{1}{2} = 50$ на 50%, $H_x = 1$ – один бит информации при двоичном основании логарифма формулы энтропии, это объём информации, которая вдвое уменьшает неопределённость, равную числу альтернатив в шкале классической логики $\{0,1\}$ и достигается полная определённость, $L_x = 4\sigma_x^2 = 1$ – один альт информации, одна «лишняя» альтернатива 0 либо 1 истинности, которую отбрасывают при принятии определённого, однозначного решения: да или нет, истина или ложь. Меру неопределённости истинного значения $\underline{x}$ можно определить и непосредственно в шкале частости-редкости в виде кусочно-линейной функции $ql(x) = \begin{cases} \underline{x}, при \underline{x} \le \frac{1}{2} \\ 1-\underline{x}, при \underline{x} > \frac{1}{2} \end{cases}$, которая интерпретируется так: если истинность суждения x квалифицируется как «скорее ложь, чем истина», $\underline{x} \le \frac{1}{2}$, то мера неопределённости равна частости $\underline{x}$, при оценке суждения «скорее истина, чем ложь» $\underline{x} > \frac{1}{2}$, неопределённость равна аффинной редкости $1-\underline{x}$.



Удобно ввести также нормированные относительные меры неопределённости $\sigma_v = \frac{\sigma_x}{\sigma_m} = 2\sigma_x$, $ql_v = \frac{ql}{ql_m} = 2ql$, $\sigma_m = ql_m = \frac{1}{2}$, которые принимают значения из интервала от 0 до 1 или до 100-процентной неопределённости и соответствуют интервалу вариаций энтропии H_x и альтернанта L_x. Сопоставление мер неопределённостей представлено на рисунке:



$ql_\nu \le L_x \le H_x \le \sigma_\nu$, равенства мер неопределённости наступают при полной определённости значений истинности суждений, $\underline{x}=1$ и 0, и при полной неопределённости, $\underline{x}=1/2$. Наиболее проста и удобна в рассуждениях в естественно-языковой среде кусочно-линейная мера, так, если $\underline{x}=0.1$, то неопределённость $ql=0{,}1$, при оценке достоверности знания $\underline{x}=95\%$ его неопределённость $ql=5\%$, $ql_\nu=10\%$, впрочем, достаточно знать одну из четырёх мер, чтобы вычислить остальные. Итак, знание частотной истинности позволяет вычислить меру неопределённости утверждения, однако знание только этой меры ничего не скажет об истинности суждения, т.к. обратный переход имеет максимальную неопределённость один бит, один альт, одна из двух альтернатив (при $\underline{x}=1/2$ неопределённость перехода, скажем, от H_x к $\underline{x}$ исчезает, но $H_x=1$ бит в этой точке).

Следующий шаг построения частотной логики состоит в распространении формул и операций классической логики, справедливых для индивидуальных объектов универсума U_0, на классы объектов, определяемых соответствующими признаками, логическими формулами и мерами в шкале частотной истинности. Формулы частотной истинности логических функций и операций приводятся в работах [1,2]. Скажем, истинность $\underline{d}$ логической суммы $d=a+b+c$ есть $\underline{d}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}-\underline{ab}-\underline{ac}-\underline{bc}+\underline{abc}$, она вычисляется в числовой арифметике. Принципиальное отличие частотной логики от классической состоит в том, что для вычисления частотной истинности формулы, содержащей n переменных, недостаточно знания значений их частотной истинности, кроме этих данных необходимо задать внелогическими средствами парные, тройные,..., n-арные частотные связи между переменными. В классической логике в этом нет необходимости, т.к. при наличии только чистых логических связей значение корреляции r_{ab} между двоичными признаками a и b равно +1 или –1 и выражается соответствующим логическим уравнением $ab=0$, $\bar{a}b=0$ и т.п., которое однозначно решается в шкале *Bit,* а тройные и т.д. связи при арности $n>2$ однозначно выражаются через парные, например, при $ab=0$ имеем $abc=0$. Когда же строгая логическая связь размывается и превращается в частотную, приближенную связь для точного вычисления меры истинности, адекватности, неопределённости необходимо точное знание мер этих связей.

В информационной практике использования аппарата частотной логики следует различать: 1) универсум U_s реальных информационных ситуаций, в которых все наличные знания, факты и модели могут быть неполными, искажёнными, 2) универсум U_s^+ информационных ситуаций с точно заданными моментами распределений данных, искомых, искажающих факторов, ошибок и помех, 3) универсуме U_s^0 ситуаций, в которых и фактическая и априорная информация известны точно. Идеальный мир частотной логики составляют универсумы U_s^+ и U_s^0, в которых частотная логика имеет одни и те же формулы оценки истинности и они предельно адекватно описывают логические и частотные связи, меры истинности и неопределённости результатов информационно-логических процессов. В реальном мире информационных ситуаций универсума U_S результаты частотной логики подвержены искажениям вследствие неполноты знаний, влиянию помех и погрешностей фактов и априорики, которые ведут к отклонениям реальных данных $\hat{q}(x,\hat{x},y,\Delta)$ от идеальных моделей $q(x,\hat{x},y,\Delta)$ универсума U_s^+. Ошибки в оценках частотных истинностей и их связей составляют следующий уровень неопределённостей.

Универсумы информационных ситуаций U_s^0, U_s^+, U_s могут описывать свойства и связи всех объектов предметики или решаемой проблемы либо выделенного условием *c(x)* класса объектов в составе универсума U_0, для которого строятся условные распределения и меры частотной истинности. Особые случаи составляют условные универсумы, содержащие единственный выделенный из U_0 объект – индивид. Приписать частость или вероятность индивиду означает обратное наследование свойства класса– сомножества каждому его представителю. Из факта принадлежности элемента сомножеству следует априорный перенос свойств сомножества на его элементы с определённой погрешностью, к которой добавляются погрешности знаний об индивиде и классе в целом. В универсуме ситуаций U_s^0 условная частотная логика превращается в классическую, а в универсуме U_s^+ условные распределения точно описывают размытия знания об индивиде, обусловленные неидеальностью источников фактической информации и априорной неопределённостью неизвестных свойств объекта.

При построении строгой теории частотной логики в основу были положены идеальные схемы замкнутого мира – универсального множества объектов U_0, идеального наблюдателя, который в состоянии безошибочно исследовать весь универсум объектов и получить точные оценки частости истинности всех свойств a_i и их сочетаний a_{ij}, a_{ijk} и т.д. В идеальном мире U_s^+ мы полагаем, что *obsubj* точно знает эти частости. Реальный субъект отличается от идеального, он работает в открытой системе, в состоянии исследовать лишь ограниченную часть универсума и при этом допускает ошибки, неполноту знаний. Переход от замкнутого к открытому миру выводит результаты исследований за рамки абсолютной строгости и приводит к изменению на противоположные роли частотной и классической логик. В самом деле, в замкнутой системе абсолютно истинные $\underline{a}=1$ и абсолютно ложные $\underline{b}=0$ высказывания допустимы и даже являются основной целью логико-математического процесса. В открытой системе любой шаг процесса может быть подвержен внешним искажениям и приобретает частотную оценку истинности, которую лишь условно принимают за абсолютную истину $\underline{a}=1$, в предположении, что в процессе получения этой оценки не произошло внешнего искажения принятых законов преобразований знаков.

В частотной логике происходит расщепление дентовой и контовой семантики понятий, $f \neq \underline{f}$, разотождествление дента – объёма понятия, представленного функцией множеств *f(x)* в алгебре Кантора посредством теоретико-множественных операций $(\cup,\cap,/)\ \approx(+,\cdot,-)$, и конта – составного свойства, выраженного помимо двоичного значения частотной истинностью $\underline{f}(\underline{x})$ высказывания или предиката о составном классе объектов *f(x)*. В классической логике эти функции отождествляются абстрагированием, при котором алгебра Кантора и алгебра Буля совпадают: $\cup=\vee=+$, $\cap=\wedge=\cdot$, $/=\neg=-$, что предопределяется двоичной шкалой истинности, т.к. если $\underline{f}=1$ или 0, то $\underline{f}=f$ в двоичном булевом базисе. В частотной логике точно выполняются все законы классической логики, включая закон исключённого третьего и двойного отрицания.

Частотная истинность $\underline{x}$ элементарного или составного высказывания x несёт информацию о средней, ожидаемой истинности x в заданном классе ситуаций, а также полностью определяет меру неопределённости и ожидаемой изменчивости частотной оценки $\underline{x}$, что упрощает анализ достоверности и процесс принятия решений. В шкале частотной истинности выражаются не только недоопределённости в знании истины, но и одновременно выражаются переопределённости или противоречия, т.к. N_a примеров, образцов говорят о том, что a=1, но $N–N_a$ эталонов утверждают, что a=0.

Частотная шкала, в которой меры истинности или ошибок измеряются в долях единичного объёма класса объектов предметики либо в процентах, имеет ясную естественнонаучную семантику, более адекватную реальным процессам, чем гипотезы или постулаты двоичной истинности (ложности) знаний в классической логике. Кроме того, частотную меру истинности легче преобразовать в ценностные критерии. Числовая частотная шкала истинности, точности или погрешности моделей открывает путь к дискретно-логическим приближениям и оптимальным аппроксимациям. Нельзя достичь абсолютной истины, но можно повысить достоверность относительных истин и установить границы, за которыми относительные истины практически не отличаются от абсолютных. Частотно-логическая истинность обладает теми же абстрактными свойствами, что и геометрическая (метрическая и комбинаторная) истинность.

Частотная логика моделирует многие неклассические логики и оценивает границы их достоверности, вводит в дискретно-логические методы идеи и алгоритмы логической аппроксимации при *NP*-сложности задачи, неполноте и искажениях фактических и априорных данных. Так, если высшие моменты логических признаков неизвестны, то возникают одномоментные и двухмоментные лапласовы приближения корреляционной логики. Частотная логика есть строгое обобщение вероятностной логики, которое строится на основе более полной формализации понятия внутренней неопределённости – индефиниции, отличной от математической вероятности и случайности реальных явлений. Частотный порядок и метрика, порождённые априорикой информационной ситуации, вместе с идеей логической аппроксимации позволяют во многих задачах преодолеть комбинаторный взрыв и *NP*-сложность логических задач.

Частотная логика заведомо сложнее классической – это машинно-ориентированный инструмент информационных технологий, обладающий объективными средствами контроля знаковых преобразований. Он плохо приспособлен для человеческих рассуждений на естественном языке, но, в отличие от классической частотная логика, точнее описывает реальные, заведомо более сложные информационные связи, а в асимптотике, когда истинности приближаются к предельным значениям 0 или 1, частотная логика точно воспроизводит классическую подобно тому как неевклидовы геометрии (Лобачевского, Римана, Финслера) воспроизводят в пределе простейшую геометрию Евклида. Арифметизация логики, введение, наряду с логическими, частотных связей между двоичными признаками превращает логику из комбинаторной в аналитическую математику с её мощным вычислительным аппаратом. Переход от численности к частости, к относительным нормированным мерам есть эффективная абстракция от численности классов и категории бесконечности.

Ближайшими широко известными аналогами частотной логики являются вероятностная, непрерывная, правдоподобная, бесконечнозначная логики. Смысловое, семантическое различие частотной и вероятностной логики состоит в выделении абстрактной неопределённости, отличающейся по смыслу от случайности, случайных событий, стохастических процессов, составляющих семантику теории вероятностей. Следует отметить также отличие идей частотной логики от подхода развитого в теории субъективных вероятностей, т.к. здесь мы рассматриваем объективные частости, которые совпадут с абстрактными вероятностями, если отвлечься от способа выбора объектов – детерминированного или случайного. И, наконец, частотная логика позволяет представить конструктивные формализации модальных и индуктивных логик [2].

Трилогика и тетралогика

Ограничимся здесь простейшими двоичными свойствами объектов: белый – небелый, четный – нечетный и т.п., но шкалы сенсфоров $\{AB\}$, аккураторов$\{C\}$ и адекваторов$\{D\}$ расширим, включая в них дополнительные третье, четвертое и т.д. значения, которые описывают разные виды достоверности и неопределенности в оценках свойств, их истинности и ошибок знакового процесса. Математические задачи и логические рассуждения очевидным образом включают неизвестные, переменные, искомые погрешности и другие неопределенности. Скажем, как быть с приведенными выше высказываниями "снег чётный", "двойка белая", когда объект на входе сенсфора или предикатора не принадлежит области определения функции или отношения? Другой важный случай – когда входные логические признаки функции не заданы, их значения неизвестны или их формализация принципиально не может быть полной и однозначной в данной информационной ситуации. Подобные затруднения в логико-математическом языке и в классической логике адресуются естественному интеллекту и разрешаются им, если это удается, на неформальном, содержательном или интуитивном уровне.

Проблема расширения двоичной шкалы классической логики $\{0,1\}$ введением других допустимых значений логических признаков, высказываний и предикатов состоит в том, чтобы придумать однозначную семантику новых значений, создать арифметику и алгебру в расширенной шкале, которые обладают общезначимостью и позволяют объективно описывать свойства природных и информационных явлений любых предметик, используя данные наблюдений и обработки информации без ссылок на интуитивную очевидность логических форм и связей.

Идея эффективного расширения двоичной шкалы $\{0,1\}$ заключается в формализации и явном введении в арифметику и алгебру логики **информационных нулей**, выражающих однозначно определенные индефиниции – формализованные модели неопределенностей логических форм и процессов, скажем, пятизначная логическая шкала $Log_5 = \{0,1,\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ включает три информационных нуля и соответствующие им три индефиниции, которые описывают три типа моделей неопределенных состояний входных или выходных признаков логических функций и отношений пятизначной логики с информационной семантикой.

В логико-математическом языке, в классической логике понятие неопределенности фигурирует в неявной форме в качестве содержательного признака, разделяющего в мышлении при постановке математической проблемы ее компоненты на данные и искомые, известные и неизвестные математические объекты и если операции, функции, отношения содержат неопределенные аргументы, то они не могут непосредственно быть использованы в процессе решения задачи, они либо отбрасываются, либо преобразуются в формы с известными аргументами. Другие возможности открываются при явном введении в логические и математические формализмы информационных нулей и правил совместного оперирования определенными и неопределенными значениями информационных объектов. Особенно это важно при расширении формализации интеллектуальной деятельности, скажем, при выборе наилучшей постановки проблемы, при поиске и принятии решений в условиях неопределенности.

Логики с информационной семантикой служат простейшими образцами подобных построений. Более точно их можно назвать логиками с информационными нулями, впрочем, неопределенность, как и погрешность (ошибка, ложь), есть негативная форма информации, точности, истинности, адекватности, это родственные взаимозависимые научные категории информационного мира знаков. Данным обстоятельством объясняются настойчивые попытки в течение тысячелетий создания и причины появления «иных» логик, которые стараются описать свойства источников фактических и априорных неопределенностей, формализуемых в виде соответствующих информационных нулей и соответствующих им предельно простых моделей неопределенностей, описанных в предыдущем пункте, это **биноль** – базисный информационный ноль внутренней неопределенности ϴ в двоичной шкале классической логики $Bit = \{0,1\}$ и **киноль** – критический информационный ноль внешеней неопределенности вне двоичной шкалы истины-лжи, иначе называемые **круглый** и **квадратный** информационные нули. Биноль и киноль являются общезначимыми межпредметными категориями, они определяют основные неопределенности информационных процессов. Включение их в логическую шкалу ведет к естественным обобщениям классической алгебры логики.

Исходная, **базисная** неопределенность состояния знания субъекта двоичного свойства $x = \theta$ проблемного субъекта характеризуется выражением «я знаю, что не знаю значение двоичного признака x». К этой форме сводятся разные виды неопределенностей, порождаемых различными причинами: нет ни одного источника информации, поэтому значение x неизвестно | значение признака известно, но неизвестны источники или свойства источников информации, нет оценки истинности значения x = да или нет | есть несколько не вполне надежных источников информации, одни присваивают признаку x значение «да», другие – «нет», т. е. знание субъекта в итоге остается неопределенным.

Обозначим внешнюю неопределенность, выводящую из двоичной шкалы допустимых логических значений, через знак "фатальный", "квадратный" ноль □ и наделим его смыслом синтаксической или семантической ошибки в логическом процессе. Появление в логическом процессе квадратного нуля означает абсурд, бессмыслицу, катастрофическую, фатальную ошибку формализации либо реализации логического процесса. Наращивая сенсфоры, аккураторы, адекваторы логического процессора средствами контроля синтаксических и семантических ошибок, на входе – предусловиями и на выходе – постусловиями, которые при обнаружении абсурда вырабатывают результирующий знак киноль □, мы получаем троичную $\{0,1,\square\}$ или четверичную $\{0,1,\theta,\square\}$ шкалы значений высказываний и предикатов, а логический процесс при исключении абсурдных формул типа "снег четный" и внутренних неопределенных знаковых ситуаций превращается в классический логический вывод.

В четвертичной логической шкале $Log_4 = \{0,1,\theta,\square\}$ можно выделить четыре троичных шкалы (подмножества значений) и соответствующие им четыре троичные логики, из них основной интерес представляет **трилогика** – объективированное обобщение классической логики со шкалой $Log_3 = \{0,1,\theta\}$ и тремя допустимыми значениями входных и выходных признаков логических операций – единица, ноль, биноль, интерпретируемых в шкалах да-нет, истина-ложь, не знаю. Следующим объективированным обобщением классической логики и трилогики является **тетралогика** с информационной шкалой $Log_4 = \{Log_3,\square\}$ с дополнительным значением киноль, знак абсурда. Следует заметить, что в изложенной семантике трилогики мы лишь временно нарушаем принцип "третьего не дано". Чуть позже будут определены многозначные номинативные и логические шкалы, с введением которых, как и в тетралогике, мы порываем с этим принципом для более полного и точного соответствия целям и сути информационно-логических процессов. Логические функции арности *n>1* получаются комбинацией унарных операций трилогики и бинарных операций классической логики, перенесенных в троичную шкалу в соответствии с принципом поглощения, при этом необходимо учесть возможные зависимости неопределенных вариаций.

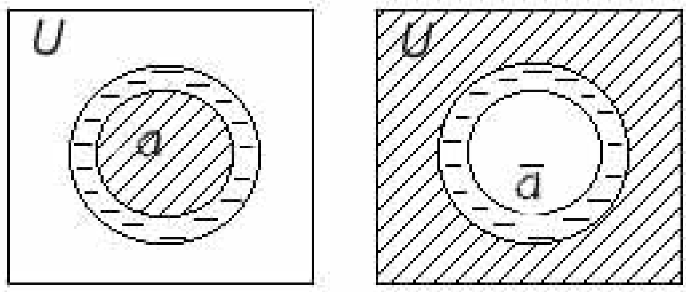
При формальном определении бинарных операций трилогики достаточно разобрать особенности оперирования с информационным нулем. В операциях логического сложения и умножения имеем:

1) $0+\theta=\theta+0=\theta+\theta=\theta$, 2) $1+\theta=\theta+1=1$, 3) $0\cdot\theta=\theta\cdot 0=0$,
4) $1\cdot\theta=\theta\cdot 1=\theta\cdot\theta=\theta$.   (*)

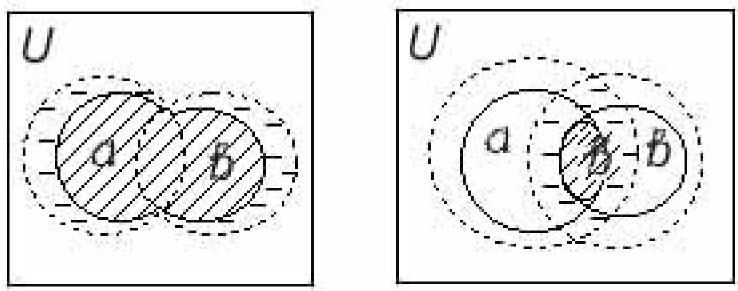
Случаи 2 и 3 соответствуют поглощению неопределенностей. Особого пояснения требуют ситуации $\theta+\theta=\theta$ и $\theta\cdot\theta=\theta$. В определенных математических и логических операциях сложения $a+b$, умножения $a\cdot b$ и т.д. обычно предполагается, что входные объекты – аргументы a и b независимы, в частности, являются константами, и этот случай отражается в таблицах истинности классической логики, а более аккуратная алгебраическая запись для информационных нулей выглядит так $\theta_a+\theta_b, \theta_a\cdot\theta_b$, т.к. неопределенные значения, в отличие от определенных, могут быть зависимыми. В случае независимости бинолей, мы не будем метить неопределенности, но отождествление неопределенностей может привести к фактическим и семантическим ошибкам и парадоксам.

Из соотношений (*) с очевидностью следует ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, дистрибутивность сложения и умножения в алгебре трилогики, остаются справедливыми и законы де Моргана, т.е. сложение можно выразить через умножение и отрицание, и наоборот, умножение заменить в трилогике сложением и отрицанием. Поскольку функции Шеффера и Пирса являются отрицаниями сложения и умножения, то перенос их в трилогику есть просто иная форма представления законов де Моргана.

На диаграмме Эйлера признаки с внутренней неопределенностью изображаются кругами с ореолом неопределенности, отмечаемом прочерками, смысл которых отождествляется с промежуточными, переходными формами или пограничными объектами (хотя такое отождествление не всегда правомерно), например, высказывание a и его отрицание изображают так:



а сумма $a+b$ и произведение $a\cdot b$ выглядят так:



Сплошной штриховке соответствует значение 1, прочеркам – θ, чистой зоне – 0. Для функций Шеффера и Пирса 0 и 1 поменяются местами. Для всех функций произвольной арности, имеющих признаки с ореолом неопределенности и не являющихся константами справедливо свойство "непрерывности": в результирующей диаграмме Эйлера переход от

0 к 1 и обратно всегда происходит через пограничную неопределенность, и нет границы, где 0 и 1 непосредственно соприкасаются.

Через операции $(+,\bullet,\neg)$ выражаются вычитание $a-b=a\cdot\overline{b}$ и импликация $a\to b=\overline{a}+b$, дифференция сумма $a\oplus b=a\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot b$ и операция эквиваленции $a\leftrightarrow b=a\cdot b+\overline{a}\cdot\overline{b}$. Их диаграммы Эйлера отличаются от двоичных переменных добавлением ореола неопределенности. Сведем операции трилогики в таблицу, где биноль обозначен прочерком, полагая θ_a и θ_b независимыми (пятая строка):

Таблица 1

№	$a\ b$	$\overline{a}$	$a+b$	$a\cdot b$	$a-b$	$a\to b$	$a\leftrightarrow b$	$a\oplus b$	$a\mid b$	$a\downarrow b$
1	0 0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
2	0 –	1	–	0	0	1	–	–	1	–
3	0 1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
4	– 0	–	–	0	–	–	–	–	1	–
5	– –	–	–	–	–	–	–	–	–	–
6	– 1	–	1	–	0	1	–	–	–	0
7	1 0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
8	1 –	0	1	–	–	–	–	–	–	0
9	1 1	0	1	1	0	1	1	0	0	0

Как и в двоичной логике, разность $a-b$ определяет операцию отрицания при $a=1$, т.е. $\overline{b}=1-b$, см. три последние строки. Особый интерес представляет импликация в условиях неопределенности – отрицание разности. Как и в классической логике при истинности посылки $a=1$ импликация однозначно определяет истинностное значение логического вывода $b=(1\to b)$ – три последние строки таблицы, а из лжи ($a=0$ – три первые строчки) следует все, что угодно $(0\to b)=1$, поэтому данная импликация всегда истинна, при любом *b*. Из неопределенности ($a=\theta$ - строки 4 – 6) следует либо неопределенность, либо истина.

Операции эквиваленции $a\leftrightarrow b=(a\to b)\cdot(b\to a)$ и дифференции $a\oplus b=(a-b)+(b-a)$ имеют более богатую реляционную, чем операционную семантику и интерпретируются как логические "равно" а $a=b$ или "не равно" $a\neq b$. В трилогике мы пользуемся двоичными отношениями $0=0, 1=1, 0\neq 1, 1\neq 0$ и переносим их на третье – неопределенное значение: $(0\leftrightarrow\theta)=(\theta\leftrightarrow 0)=(\theta\leftrightarrow 1)=(1\leftrightarrow\theta)=\theta$. Соотношение $(\theta\leftrightarrow\theta)$ более строго записывается в виде $\theta_a\leftrightarrow\theta_b=\theta$ – равенство неопределенностей есть неопределенность. Аналогично определяется смысл отношения "не равно" как отрицания отношения равенства $\leftrightarrow$.

Операция эквиваленции служит элементарным представлением адекватора *D* в трилогике. Мера адекватности $\nabla=D(\hat{x},x)=\hat{x}\leftrightarrow x$ в троичной реализации истинного высказывания $x=C(obj)$ и субъектного высказывания $\hat{x}=AB(obj)$ также принимает троичные значения, $\nabla\in Bit_\theta$.

Изобразим троичный адекватор в виде матрицы и сравним ее с двоичной матрицей классической логики.

x / $\hat{x}$	0	–	1
0	1	–	0
–	–	–	–
1	0	–	1

Здесь также сохраняется отождествление в шкале Log_3 двух видов истины и лжи. Случай, когда истина не известна, $x=\theta$ – средняя колонка, по традиции обычно отбрасывают и анализируют две оставшиеся ситуации неопределенности состояния наблюдателя, когда да или истина, $x=1$ и нет или ложь, $x=0$ принимаются за неопределенность $\hat{x}=\theta$ – средняя строка. В предикатной семантике эти случаи и в самом деле часто можно отождествить, если следствием неопределенного значения результата исследования $\hat{x}=\theta=\theta$ является решение о продолжении изучения неизвестного явления до установления истины $\hat{x}=1$ или лжи $\hat{x}=0$, в иных ситуациях подобное отождествление не всегда правомочно, $\theta_0 \neq \theta_1$.

Остается рассмотреть случай $x=\theta$ – второй столбец матрицы, реально соответствующий неопределенному значению цели исследования, скажем, из-за природной изменчивости свойств объекта, попеременно принимающего значения $x=0$ и $x=1$. В этом случае, строго говоря, ошибочными (ложными) будут решения $\hat{x}=0$ и $\hat{x}=1$, характерные для художественных текстов, идеологических, религиозных и т.п. высказываний, но адекватор их отмечает значениями $\nabla=\theta$, а утверждение $\hat{x}=\theta$, совпадающее по форме с истинным высказыванием $x=\theta$, имеет меру адекватности $\nabla=\theta$, т.к. неопределенность θ_x нельзя приравнять неопределенности $\theta_{\hat{x}}$, а можно записать лишь $\theta_x \leftrightarrow \theta_{\hat{x}}=\theta$. Последнее положение определяется как **постулат неопределенности трилогики**: совпадение неопределенностей значений идеального и реального информационных объектов порождает не истину, а всего лишь неопределенность.

Таким образом, при конкретизации формальной семантики трилогики мы имеем два вида истины – $И_0$, $И_1$, два вида лжи – $Л_0$, $Л_1$ и пять вариантов неопределенности $Н_i$, из которых ситуации ($x=\theta, \hat{x}=0$) и ($x=\theta, \hat{x}=1$) можно отнести к ослабленным вариантам лжи и назвать их полуложью ПЛ, когда действительную неопределенность называют, во-первых, истиной, а, во-вторых, ложью. Тогда семантическая матрица адекватора из троичной превращается в девятиричную, порождая многозначные логики от троичной до девятиричной, 9-значной, в которой все значения истинности различимы и можно построить невообразимое число бинарных операций.

x / $\hat{x}$	0	–	1
0	$И_0$	$ПЛ_0$	$Л_1$
–	$Н_0$	$Н_\theta$	$Н_1$
1	$Л_0$	$ПЛ_1$	$И_1$

Если целью исследования считается поиск и достижение истинных объектов $(x=1)$, то элементы $(\hat{x}, x)$ матрицы имеют следующую интерпретацию: $И_1=(1,1)$ – цель достигнута, $И_0=(0,0)$ – ложная цель отвергнута, $Л_0=(0,1)$ – пропуск цели, $Л_1=(1,0)$ – ложная тревога, $Н_0=(\theta, 0)$ – ложная надежда, $Н_1(\theta, 1)$ – обоснованный оптимизм, $ПЛ_1=(1,\theta)$ – необоснованный оптимизм, $ПЛ_0=(0,\theta)$ – необоснованный пессимизм, $Н_\theta=(\theta, \theta)$ – действительная неопределенность, которая в отличие от постулата неопределенности трилогики может иметь дополнительный смысл истинного, точно определенного знания того, что свойство x изменчиво, невоспроизводимо, неопределимо, поэтому $\theta_{\hat{x}}=\theta_x$ – **истинная** неопределенность.

Теперь рассмотрим информационные ситуации с логическими зависимостями неопределенных аргументов бинарных операций трилогики и, применяя принцип поглощения бинолей, получим таблицу, которая определяет результаты логических операций при зависимых аргументах $a=\theta_a$, $b=\theta_b$:

Таблица 2

Логич. связь	$a+b$	$a \cdot b$	$a-b$	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$	$a \oplus b$	$a \mid b$	$a \downarrow b$
$a \to b$	–	–	0	1	–	–	–	–
$b \to a$	–	–	–	–	–	–	–	–
$a \to \overline{b}$	–	0	–	–	–	–	1	–
$\overline{b} \to a$	1	–	–	–	–	–	–	0
$a=b$	–	–	0	1	1	0	–	–
$a=\overline{b}$	1	0	–	–	0	1	0	1

При импликативной связи логических признаков неопределенности поглощаются для двух операций (одна есть отрицание другой) из восьми, представленных в таблице, исключение составляет связь $b \to a$ (вторая строка), в которой все восемь операций имеют неопределенный результат, что объясняется отсутствием в таблице асимметричных операций $b-a$ и $b \to a$, в которых при связи $b \to a$ биноли поглощаются, см. первую строку. Импликация $a \to b$ (обратная теорема) дает неопределенность при истинности связи $b \to a$ (прямой теоремы), это свойство так называемой абдукции – неверный логический вывод в двоичной классической логике «по аналогии», ложный при $a \neq b$. Для эквиальных связей признаков a и b биноли поглощаются четырьмя и шестью (последняя строчка) операциями трилогики в полном соответствии с определением базисного отрицания и законами противоречия и исключённого третьего.

Таблицы 1 и 2 можно принять за исходные формальные определения операций трилогики, согласованные с информационной семантикой логических преобразований и отношений, как это принято в классической логике. Из этих определений однозначно следуют все законы классической логики, правила символьных преобразований булевой алгебры, их справедливость в трилогике – в шкале Bit_θ с зависимыми и независимыми неопределенностями: ассоциативность и коммутативность сложения, умножения, эквиваленции, дифференции, законы дистрибутивности, де Моргана, поглощения констант и переменных, эти законы без всяких изменений переносятся в трилогику. Тавтологии – всегда истинные формулы: законы тождества $a \leftrightarrow a$, не противоречия $\neg(a \cdot \overline{a})$, исключенного третьего $a + \overline{a}$ равны 1 по определению логических операций таблицами 1 и 2, а также принципом поглощения неопределенностей, они семантически эквивалентны и сводимы по строгим правилам алгебраических преобразований к какому-либо одному закону, скажем, к последнему: $a \leftrightarrow a = a \cdot a + \overline{a} \cdot \overline{a} = a + \overline{a}, \neg(a\overline{a}) = a + \overline{a}$ – закон исключенного третьего, безосновательно опровергаемый интуиционистской логикой, а из определения базисного отрицания следует тавтология закона двойного отрицания: $\overline{\overline{a}} \leftrightarrow a$. В трилогике также справедливы законы контрапозиции $(\overline{a} \to b) = (\overline{b} \to a)$ и разложения эквиваленции.
Оценим, в какой степени дискретная частотная логика с тремя значениями истинности $\{0,1/2,1\}$ моделирует трилогику $\{0,1,\theta\}$ при задании соответствия между информационным нулем θ и частостью истинности 1/2. Для этого в множестве исходных высказываний выделим истинные $\underline{a} = 1$ и ложные $\underline{b} = 0$ высказывания, а остальным высказываниям в интервале истинности $0 < \underline{c} < 1$ припишем значение $\underline{c} = 1/2$.
Аналогичный результат получается и для двух источников информации с согласованными (1,1) и (0,0) и противоречивыми (1,0) или (0,1) выходными данными. Ограничимся операциями из базиса Буля $(+,\cdot,\neg)$, из которых получаются все остальные операции арности $n \geq 2$.

Очевидно, унарная операция отрицания $c = \overline{a}$ имеет одинаковое выражение истинности в трилогике $\{0,1,\theta\}$ и частотной логике, если приравнять $\theta = 1/2$, т.к. $\underline{c} = 1 - \underline{a}$, отсюда $0 = \overline{1}$, $1 = \overline{0}$, $\theta = \overline{\theta}$, 1/2 = 1 – 1/2. Бинарная операция умножения $c = a \cdot b$ в частотной логике является внелогической и величина истинности произведения ab должна быть задана априори внелогическими средствами, а в данном случае троичной частотной логики оно принимает одно из трех значений: 0, 1/2, 1. В трилогике произведение вычисляется по значениям a и b: $0\cdot\theta=0$, $1\cdot\theta=\theta$, $\theta\cdot\theta=\theta$, если биноли логически независимы. В частотной логике этим соотношениям соответствуют априорные ограничения: $0\le \underline{ab} \le \underline{a},\underline{b} \le 1$; $\underline{a}+\underline{b}\le 1+\underline{ab}$. В дискретной шкале значений $\underline{a},\underline{b}\in\{0,\frac{1}{2},1\}$ эти неравенства превращаются в равенства, по ним однозначно восстанавливается значение $\underline{ab}$ в 8 случаев из 9, исключение составляет лишь произведение $\theta=\theta\cdot\theta$.

В самом деле, если $\underline{a}$ или $\underline{b}=0$, то по первому неравенству $\underline{ab}=0$, что соответствует в вещественной арифметике умножению на ноль и в результате будет ноль. При $\underline{a}=\underline{b}=1$ величина $\underline{ab}$ из первого неравенства ≤1, а из второго ≥1, значит, $\underline{ab}$=1, а если одно из этих значений равно 1/2, то получаем из первого неравенства $\underline{ab}\le\frac{1}{2}$, из второго $\underline{ab}\ge\frac{1}{2}$, следовательно, $\underline{ab}=\frac{1}{2}$, что полностью соответствует случаю $1\cdot\theta=\theta$. Остается случай $\underline{a}=\underline{b}=1/2$, соответствующий умножению независимых неопределённостей $\theta\bullet\theta=\theta$. Из неравенств и диаграммы Эйлера следует неопределенность частости произведения: $0\le\underline{ab}\le 1/2$ и, следовательно, в троичной частотной логике произведения может принимать только два значения $\underline{ab}$=0 или $\frac{1}{2}$. Нулевому значению соответствует полная определенность составного высказывания – несовместность максимально неопределенных высказываний a и b и строгая импликативная связь между ними: $a\to\overline{b}$ и $b\to\overline{a}$. Второе значение $\underline{ab}$=1/2, напротив, выражает максимальную неопределенность его истинности $\sigma_a=\frac{1}{2}$, когда ответы "да" и "нет", имеют одинаковую меру истинности, как и ответ "ни да, ни нет", поэтому семантически более обоснованным значением истинности неопределенного произведения $a\cdot b$ из двух возможных будет решение дискретных неравенств значением в виде $\underline{ab}=\frac{1}{2}$. Это значит, что в троичной частотной арифметике $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ – единственный случай из 9, отличающий троичное перемножение 0, $\frac{1}{2}$ и 1 от произведения в вещественной арифметике, т.к. в последней полученное значение $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ не принадлежит троичной шкале и заменяется семантически оправданным значением $\frac{1}{2}$, которое соответствует ситуации логической независимости бинолей.

Таблица, определяющая умножение будет такой:

$\underline{ab}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

1	0	$\frac{1}{2}$	1

Она совпадает с таблицей трилогики, если переобозначить $\frac{1}{2}$ на θ, и в ней $\theta{\cdot}\theta{=}\theta$. Таким образом, при независимости неопределенностей в троичной частотной логике достаточно знать независимые истинности $\underline{a}$ и $\underline{b}$, чтобы вычислить все остальные истинности логических операций в полном соответствии с формулами трилогики.

Скажем, истинность суммы $a{+}b$ теперь может быть вычислена по формуле частотной логики $\underline{a{+}b} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{ab}$. Легко убедиться, что все 9 возможных соотношений трилогики $\{0,1,\ \theta\}$: $0{+}\theta{=}\theta,\ \theta{+}\theta{=}\theta,\ 1{+}\theta{=}1$ и т.д. соответствуют сложению в троичной частотной логике, представленного таблицей:

$\underline{a{+}b}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

Для примера вычислим истинность суммы при $\underline{a} = \frac{1}{2}$, $\underline{b} = \frac{1}{2}$, тогда $\underline{ab} =$ 1/2, $\underline{a{+}b} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{ab} = \frac{1}{2}$.

Точно также доказывается справедливость остальных бинарных и n-арных операций, например, сумма трех признаков $c\ = a_1{+}a_2{+}a_3$, и имеет истинность $\underline{c} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3 - \underline{a}_{12} - \underline{a}_{13} - \underline{a}_{23} + \underline{a}_{123}$, где $\underline{a}_i \in \{0,1/2,1\}$. По заданным $\underline{a}_{\mathrm{i}}$ вычисляем $\underline{a}_{\mathrm{ij}}$, и затем $\underline{a}_{\mathrm{ijk}}$, а далее истинность $\underline{c}$; так, при $\underline{a}_1 = \underline{a}_2 = \underline{a}_3 = 1/2$, a_{ij} = 1/2, a_{ijk} = 1/2, $\underline{c} = 3 \cdot 1/2 - 3 \cdot 1/2 + 1/2 = 1/2$. Аналогично проверяется полное соответствие импликации $a \to b = \overline{a} + b$ и других функций этих логик.

Таким образом, частотная логика полностью воспроизводит не только двоичную классическую, но и трилогику, если информационному нулю θ и произведению $\theta \cdot \theta$ соотнести частость истинности, равную $\frac{1}{2}$. К соответствию этих логик можно подойти и с практической точки зрения: трилогика – троичная информационная логика является простейшей аппроксимацией частотной логики и расширяет возможности классической логики, учитывая не только истину и ложь, но и предельную неопределенность логического вывода, а программно-аппаратная реализация троичной арифметики гораздо проще и дешевле арифметики вещественной. Дополнительные погрешности в оценках частотной истинности, которые возникают при замене частостей, отличных от 0 и 1, значением $\frac{1}{2}$ можно оценить по формулам частотной логики.

Трилогика является предельным упрощением частотной логики и простейшим обобщением классической логики, которое учитывает внутреннюю неопределенность состояний информационно-логического процесса. Троичная шкала $\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\}$ появилась в исторически первой многозначной логике, созданной Я.Лукасевичем [5]. Он связывал построение трехзначной логики с «борьбой за освобождение человеческого духа», а его доказательство недостаточности классической логики для описания модальностей и необходимости построения неклассических систем некоторые ученые сравнили с открытием неевклидовой геометрии.

Промежуточное значение $\frac{1}{2}$ в этой шкале имеет неформализованную семантику, Лукасевич использовал термины «нейтральное» или « возможное» значение (чего?, если значение меры истинности и неопределенности, то мы приходим к частотной интерпретации числовых значений троичной шкалы: 0, $\frac{1}{2}$ и 1). Логическая система Лукасевича строится в базисе Фреге (¬, →), негация определяется числовым вычитанием: $\bar{a} = 1 - a$, импликация выражается числовой функцией $a \to b = \min(1, 1 - a + b)$, остальные логические операции определяются в этом базисе по формулам классической логики, однако в троичной логике Лукасевича, в отличие от трилогики, результат переноса операций зависит от исходных формул. Так, если дизъюнкцию $a+b$ определить выражением $\bar{a} \to b$ или равным ему $\bar{b} \to a$, аналогично конъюнкцию $a \cdot b$ выразить формулой $\neg(a \to \bar{b}) = \neg(b \to \bar{a})$, то законы противоречия и исключенного третьего будут справедливыми в этом варианте логики Лукасевича, если же взять за исходные формулы $a + b = (a \to b) \to b = (b \to a) \to a$, $a \cdot b = \neg\left(\left(\bar{a} \to \bar{b}\right) \to \bar{b}\right) = \neg\left(\left(\bar{b} \to \bar{a}\right) \to \bar{a}\right)$, которые используются в аксиоматизациях логики Лукасевича и других логик в работах А. Тарского, М. Вайсберга, Я. Слупецкого и др., то законы классической логики не выполняются. Причина этого факта состоит в том, что импликация Лукасевича отличается от импликации трилогики в одном значении из девяти: $\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = 1$ – в интерпретации Лукасевича: “Если из возможного логически следует возможное, то эта формула истинна», в нарушении информационного принципа поглощения неопределенностей, в согласии с которым «если из биноля следует логически независимый биноль, то эта формула имеет неопределенное значение биноль”. Истина в этом случае будет только при наличии логических связей аргументов: $a \to b$ или $a = b$ – первая и предпоследняя строки таблицы 2.

Следует отметить также связь импликации Лукасевича с приведенным выше обоснованием троичной аппроксимации частотной логики при выборе значения произведения $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$ или $\frac{1}{2}$. Там было выбрано значение $\frac{1}{2}$, но если конъюнкцию Лукасевича определить по правилу $a \cdot b = \neg(a \to \bar{b})$, то произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$, а логическая сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, поэтому законы классической логики выполняются в этом неординарном варианте логики Лукасевича. При выборе формулы $a \cdot b = \neg\left(\left(\bar{a} \to \bar{b}\right) \to \bar{b}\right)$ имеем $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – законы противоречия и исключенного третьего нарушаются, а сам выбор формул и аксиом логических систем не имеет в данной ситуации объективных оснований. По сходным причинам известные троичные логики Брауэра-Гейтинга, Чёрча, Гудстейна, Шестакова, Бочвара, Клини, Рейхенбаха не удовлетворяют информационным принципам объективных логик, не учитывают частотные и логические связи неопределенных логических признаков. Многочисленные существующие аксиоматизации этих и других логик привносят дополнительные семантические неопределенности и неадекватности информационной семантике логических процессов.

Обсуждение результатов

Развитие информационных систем и технологий, формализация информационной семантики и неопределенностей знаковых процессов позволили прояснить некоторые проблемы классической и неклассических логик. Логический подход к созданию новых информационных технологий является в настоящее время, пожалуй, наиболее распространенным при разработке интеллектуальных и экспертных систем в различных предметных областях. В этих исследованиях двоичная классическая логика обычно заменяется какой-либо неклассической логикой, по-видимому более соответствующей информационной ситуации и поставленной проблеме. Число и разнообразие неклассических логик – модальных, интуиционистских, конструктивистских, монотонных, многозначных, индуктивных, вероятностных, размытых, правдоподобных, нечетких, диффузных, квантовых и т.д – экспоненциально растет со временем, вместе с тем эти логики пока не оказывают заметного влияния на теории и информационный инструментарий предметик.

Накопленный опыт с очевидностью показывает, что с позиций стоящих актуальных задач автоматизации человеческой деятельности основные трудности создания многозначных и других неклассических логик не формального синтаксического, математического или алгоритмического характера, а принципиально семантического свойства, они имеют весьма ограниченный смысл, обусловленный отсутствием строгих конструктивных определений истинности и неопределенности, общезначимых однозначно формализованных семантик неклассических логик, согласованных с традициями предметик и проверенными способами оценок достоверности, изменчивости объектов, погрешности измерений, вычислений, рассуждений и последствий принимаемых решений.

Все известные виды логик появились как результат формализации тех или иных фрагментов мышления, естественного языка и природных явлений. Проверить адекватность описания мышления и речи моделями психологии, физиологии, лингвистики и абстрактного представления этих моделей в логических системах пока не представляется возможным и в этом нет безусловной необходимости, так как мышление и речь моделируют реальность, представляя знания в среде естественного языка, поэтому достаточно проверить адекватность информационно-логического процесса описания реальности по его результативности, в соответствии с известным функциональным критерием Алана Тьюринга, по которому можно отвлечься от структурных различий естественного и искусственного интеллекта, оставляя подконтрольными воспроизводимые объективные знания. Материализация логических процессов и объективация знаний состоит в конструировании физических объектов и процессов, воспроизводящих результаты логического вывода и оценки их адекватности (точности, достоверности) в информационной среде искусственного интеллекта.

Исходным пунктом строгой формализации классической логики, идущим от стоиков, в частности, от Хризиппа, является **принцип двузначности** свойств и отношений, близкий по смыслу к логическим законам исключенного третьего и противоречия: каждое утверждение либо истинно, либо ложно. Этот принцип сыграл неоценимую роль в развитии науки, в упрощении, облегчении повседневной мыслительной деятельности людей, но далеко не всё гениально простое является правильным. С момента провозглашения и по сей день не прекращаются споры и сомнения в истинности и границах применения этого постулата – краеугольного камня классической логики. По этому поводу приведём слова Цицерона: «Итак, Хризипп напрягает все силы для доказательства того, что всякая «аксиома» или истинна, или ложна («аксиома» по-гречески – это предложение, утверждение).

И в самом деле, реальные мыслительные информационные процессы и знания о о материально-информационной реальности не укладываются в жесткую схему двузначности оценок всякого знания, но могут быть сведены (с некоторыми потерями информации и допустимыми приближениями) к наборам взаимосвязанных двузначных шкал, семантика которых может сильно отличаться от оценок истины или ее отрицания – лжи. Возможность отбрасывать формы, имеющие оценки истинности, отличные от 1 и 0, истины и лжи, возникает в предметиках по крайней мере в двух случаях. Во-первых, когда достоверность знакового процесса настолько велика, что результату приписывается однозначная оценка истинности: 0 или 1, например нам неизвестно изменились ли законы природы за 300 лет после открытия Ньютоном закона всемирного тяготения, но физики с уверенностью утверждают, что эти изменения меньше ошибок наблюдения и закон Ньютона истинен.

Вторая причина допущения возможности отбрасывания "третьих" значений истинности лежит в целевых установках развития логики и математики, а, значит, и соответствующего им языка – это поиск абсолютного знания, таких знаковых конструкций и процессов, которым с предельной достоверностью можно приписывать значения истины = 1, или лжи = 0, и если есть какие-то отклонения процесса от идеального в исходных знаках или преобразованиях, то такие результаты в рамках классической логики не рассматриваются, т.к. математическая традиция предельно строгих доказательств требует «отсечь» все суждения, истинность которых отлична от 0 и 1.

В аппарат трилогики и тетралогики явно вводятся общезначимые информационные нули – внутренний и внешний, относительно двоичной шкалы классической логики, биноль и киноль. В формализованной информационной семантике логического процесса биноль появляется в ситуациях: 1)логической признак не задан, $\hat{x} = \theta$, следовательно, истинное значение неизвестно, $x=\theta$, 2) признак $\hat{x}$ задан, но его истинность неизвестна $\nabla=\theta$ или неизвестен источник информации, породивший значение $\hat{x}$, либо неизвестны свойства источника, следовательно, $x=\theta$, 3) источники информации дают противоречивые сведения о значении x, по одним данным $\hat{x}$=0, по другим $\hat{x}$=1, следовательно, $x=\theta$, 4) процесс получения оценки значения признака привел к абсурду, $\hat{x}$=□, следовательно, $x=\theta$.

В информационно-логическом процессе в формализме тетралогики киноль возникает в следующих ситуациях: 1) при нарушении предусловий на входе и постусловий на выходе логической функции или отношения, операционной продукции, процедур контроля дедуктивной системы, 2) при анализе противоречий между фактическими данными, а также между фактами и априорикой решаемой проблемы, 3) при реализации операций тетралогики. Между информационными нулями θ и □ различных логических переменных возникают частотные и логические связи. Механизмы образования зависимостей между неопределенными классами объектов универсума различаемых в шкалах трилогики и тетралогики по сути те же, что и в любых других шкалах определенных значений, числовых и нечисловых, например, логическая связь бинолей θ_a и θ_b может быть обусловлена недоступностью измерения свойств a и b определенных классов объектов универсума предметики. Строя распределения численности или частости троичных и четверичных логических переменных по фактическим данным и теоретическим моделям получают естественные обобщения частотной логики и формальный аппарат **частотной трилогики** и **частотной тетралогики.** Следует подчеркнуть, что теоретическая истинность, ложность, противоречивость и другие модальности знания неотделимы от универсума информационных ситуаций, в котором оцениваются свойства знаний.

В трилогике и тетралогике, в отличие от частотной логики не происходит расщепления логической функции и выделения её функции истинности и неопределённости, вычисления ведутся в соответствии с правилами, подобными алгебре классической логики. В трилогике выполняются все законы, эквивалентные и неэквивалентные (импликативные) преобразования классической логики, а функции многих логически независимых вариаций переменных выражаются через бинарные операции, справедлив также линейный нестрочный порядок $0 \le \theta \le 1$, если в двоичные шкалы ввести строгий порядок: нет < да, ложь < истины, 0 < 1, а при отсутствии информационных нулей трилогика и тетралогика воспроизводят преобразования классической логики, при этом в шкале тетралогики выразимы обратные логические функции. Появление в логическом процессе абсурда и знака киноль ведет к нарушению законов логики и информатики, это важное отличие тетралогики от трилогики, в которой все законы выполняются.

Аппарат трилогики и тетралогики сложнее аппарата формализмов классической логики, но значительно проще частотной логики, что позволяет надеяться на применения информационных нулей в рассуждениях естественного интеллекта в среде естественного языка при описании типовых мыслительных ситуаций и решений. Другие применения неклассических логик с информационной семантикой относятся к созданию систем искусственного интеллекта и интеллектуальных интерфейсов. Частотная логика малопригодна для человеческих рассуждений – это инструмент машинного интеллекта, но в эргатических системах, в процессах общения автомата и человека, в процедурах объяснения машинных решений весьма полезными оказываются трилогика, тетралогика, аппроксимационные вербальные логики [3].

Следует отметить различия логик с информационной семантикой и дискретно-логических методов математики, дискретизацию числовой шкалы истинности частотной логики и дискретизацию количественных параметров проблемных объектов, скажем, при логическом моделировании переходных процессов в цифровых схемах, агрегацию качественных характеристик объединением их классов и присвоением вербальных значений имен составных классов в номинативных или ранговых шкалах. Многозначные логики дискретной математики – это теория дискретных функций, которая абстрагируется от соответствия знаний и утверждений действительности, поэтому слово логика в этой теории можно заключить в кавычки. Дискретизация и агрегация количественных и качественных признаков, разбиение и покрытие классов объектов ведут к размытым понятиям и информационным нулям.

Язык любой логики ограничен и не универсален. Логики с информационной семантикой есть постепенный переход от двоичной классической логики к более сложным математическим и информационным моделям систем и технологий. Из всех мыслимых и фактически созданных логик особое место занимают логики, объективно описывающие состояния информационно-материальной реальности и содержащие собственный инструмент строгой оценки истинности и неопределённости логического вывода в рамках однозначно определенного формализма – прежде всего это классическая логика, отвергающая все недоопределенные и переопределённые значения переменных, оставляя их обработку неформализованной части естественного интеллекта, затем её обобщения на неопределённые ситуации – трилогика, тетралогика, частотная логика и их комбинации, позволяющие учесть ошибки формализации, нарушения гипотезы двоичности Хризиппа, частичность и многозначность сенсоров и реферов информационных систем и технологий.

Если частотная логика предполагает при реализации сложные машинные вычисления, то трилогика и тетралогика могут найти применение не только в упрощённых алгоритмах и аппаратных средствах автоматизированных систем, но и в процессах естественного мышления и языка. Дана Скотт сетовал: «Да, да, я слышу возражения, выкрикиваемые со всех сторон. Если мы собираемся использовать неопределенные термы, то почему нельзя использовать и неопределенные истинностные значения? Разве это не более естественно? Может быть и так, но сначала покажите мне пригодную для работы трехзначную логику. Я знаю, что такая логика может быть построена и по меньшей мере четыре раза в год кто-нибудь приносит новую идею, но до сих пор она не разработана до такой степени, чтобы с ней было приятно работать. Может быть, такой день настанет, но меня еще нужно убедить. Поэтому мой совет такой: продолжать работать с двузначной логикой, потому что ее легко понимать и использовать в приложениях …» [6]. Ну а совет, который следует из предшествующего изложения – работать с подходящей объективной логикой и ее формализованной информационной семантикой.

Критика нечеткой логики

В начале 70-х годов необычайно популярной стала нечеткая логика, предложенная Л.Заде для описания неопределенных ситуаций в задачах классификации, распознавания, анализ сложных систем, разработки экспертных систем и искусственного интеллекта, появилась масса статей, книг, алгоритмов, программно-аппаратных средств. Почти одновременно прозвучали основательные возражения «нечетким» идеям со стороны известных ученых и педагогов. Популярность «нечеткого» течения в информатике-кибернетике объясняется внешней простотой предлагаемых методов описания неопределенностей, доступностью для использования и творчества всем желающим, неспециалистам-предметникам и недоучившимся специалистам-информатикам. В самом деле, для построения решающего правила достаточно из субъективных соображений задать треугольники, трапеции, сигмоидные функции логических признаков и использовать готовый пакет программ.

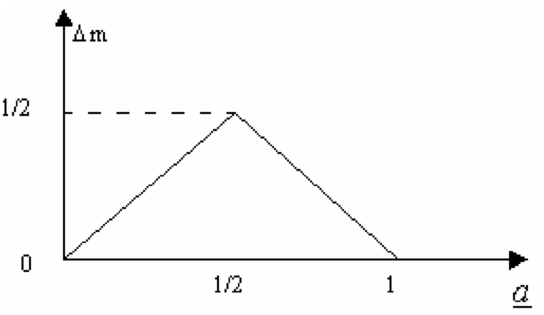
Критика нечеткой логики имеет теоретический и практический аспекты. С позиций строгой логической теории информационные ситуации решаемой проблемы и существующие в них неопределенности, «нечеткости» должны быть объективированы, указаны источники информации и неопределенностей, построены их модели и показана либо постулирована их адекватность действительной или виртуальной реальности. В нечеткой логике широко используется квазиформализация, которая начинается с неопределенных терминов «нечеткость» (подобно тому, как в логике Лукасевича не определены понятия «нейтральный» или «возможный» для значения истинности $\frac{1}{2}$) и «вещественная функция принадлежности», которые заменяют научные понятия распределения точности, истинности, погрешности, энтропии, поэтому получаемые в нечеткой логике результаты нельзя оценить ее средствами и предсказать ожидаемые последствия принимаемых решений. В нечеткой логике используются также субъективно определяемые размытые понятия предметной области – так называемые лингвистические переменные, которые вносят дополнительные синтаксические (математические) и семантические неопределенности в теорию нечеткой логики. Неопределенная семантика понятий нечеткой логики приводит к неограниченному росту вариантов семантики и формального выражения логических операций (так, в одной из работ по нечеткой логике приводится более двух десятков определений импликации, в основном, несуразных или совпадающих с определениями дизъюнкции, дифференции и т.п.).

В практическом аспекте методы нечеткого анализа представляют собой специальные способы аппроксимации дискретных моделей. Достоверность и правила построения приближенных дискретных решений оценивается стандартными внелогическими средствами, не имеющими отношения к формальному аппарату нечеткой логики, а процедуры и результаты аппроксимации, как хорошо известно, допускают возможность применения любых конструкций и понятий, хороших и плохих, правильных и ошибочных, выделяемых или отвергаемых, подавляемых в процессе синтеза приближенного решения по заданному критерию поставленной задачи. Нечеткая логика как аппарат дискретной аппроксимации лингвистическими переменными с большой натяжкой и семантической неопределенностью можно называть логикой.

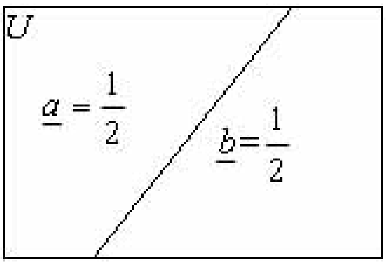
В некоторых работах нечеткость интерпретируется как математическая вероятность и используются модели теории вероятностей для описания неопределенностей. В этой интерпретации появляется возможность оценить точности, неопределенности и погрешности формул нечеткой логики в понятиях и конструкциях частотной логики. Итак, нечеткая (минимаксная) логика Заде оперирует вещественными функциями принадлежности $\mu_i(z) = \mu(z \in Q_i)$ некоторого объекта z нечеткому множеству Q_i. Функции μ_i принимают вещественные значения в интервале $0 \le \mu_i \le 1$. Объединениям, пересечениям и дополнениям нечетких множеств соответствуют нечеткие логические операции сложения – дизъюнкции $\mu_1 + \mu_2 = \max(\mu_1, \mu_2)$, умножения – конъюнкции $\mu_1 \cdot \mu_2 = \min(\mu_1, \mu_2)$ и отрицания–негации $\overline{\mu} = 1 - \mu$, см.[242]. Если функцию $\mu_i(z)$ интерпретировать как частость или вероятность истинности высказывания о принадлежности $z \in Q_i$, то можно точно оценить погрешности нечетких операций при неточно заданных исходных данных об истинности двоичных логических признаков.

Далее полагаем: нечеткие функции принадлежности $\mu_1(a)$ и $\mu_2(b)$ есть меры истинности искаженных двоичных признаков $a = \hat{x}_1 = x_1 \oplus \mathrm{v}_1$, $b = \hat{x}_2 = x_2 \oplus \mathrm{v}_2$, которые для упрощения вывода предположим упорядоченными по их объемам: $\underline{a} \le \underline{b}$. Операция отрицания $\overline{a}$, как и тождественное преобразование нечетких признаков не изменяют их погрешностей: $\underline{\overline{a}} = 1 - \underline{a}$ — отрицание имеет исходное искажение v_1. Операции сложения и умножения признаков a и b, как они определены в нечеткой логике, привносят дополнительные ошибки к выражениям $\Delta f(x, \mathrm{v})$ из табл.1, так как в их определениях не учитываются частотные и логические связи между a и b, причем, дополнительные ошибки имеют систематический характер.

В нечеткой логике Заде исходными данными служат объемы признаков $\underline{a}$, $\underline{b}$, а истинный объем произведения $\underline{ab}$ считается неизвестным и оценивается минимальным признаком – выражением $\underline{\overset{\wedge}{ab}} = \underline{a}$ с всегда положительной ошибкой второго рода: $\Delta'_{\bullet} = \underline{\overset{\wedge}{ab}} - \underline{ab} = \underline{a} - \underline{ab} \ge 0$. Минимальное значение ноль дополнительной (к искажениям ν_1 и ν_2) ошибки нечеткого перемножения возникает при позитивной логической связи a и b – вложенности признаков (из a следует b). Максимальное значение ошибки $\Delta_m = \max \Delta'_{\bullet}$ соответствует минимуму объема пересечения: $\min \underline{ab} = \max(0, \underline{a} + \underline{b} - 1) = h$, который достигается при $\underline{a} = \underline{b}$ и предельной негативной связи признаков, их несовместности, следовательно, максимальная ошибка лежит в интервале $0 \le \Delta_m \le \underline{a} - h$. Ее зависимость от объема равных признаков кусочно-линейна: $\Delta_m = \underline{a}$ при $\underline{a} < \frac{1}{2}$ и $\Delta_m = 1 - \underline{a}$ при $\underline{a} \ge \frac{1}{2}$. Итак, при увеличении размытия признаков и отклонении от классических значений истинности 0 или 1 дополнительная ошибка нечеткой конъюнкции (логического произведения) зависит от частотной связи сомножителей и может изменяться от 0 до максимального значения внутри треугольника вплоть до предельной неопределенности решения $\max \Delta_m = \frac{1}{2}$, равной среднеквадратической неопределенности $\sigma = \sqrt{\Delta_m (1 - \Delta_m)} = \frac{1}{2}$ — “безразлично – либо да, либо нет”.



Ошибка нечеткого логического сложения, которое равно максимальному признаку *b*, по модулю совпадает с ошибкой конъюнкции $\Delta_\bullet$, но имеет противоположный знак: $\Delta_+ = \underline{a} \hat{+} \underline{b} - \underline{a+b} = \underline{ab} - \underline{a} = -\Delta_\bullet \le 0$ – эта ошибка первого рода, “пропуск цели”, носит систематический характер и равна нулю при вложенности признаков, в иных случаях всегда отрицательна и лежит в пределах $h - \underline{a} \le \Delta_+ \le 0$. Следовательно, размытие признаков a и b, т.е. отклонение их истинностей от 0 и 1 вносит большую, до 50%, дополнительную абсолютную и 100-процентную относительную ошибку в результаты нечеткого логического вывода за счет систематического завышения (по определению) логического произведения – это ошибка только первого рода, и систематического занижения логической суммы – это ошибка только второго рода. Модуль этих ошибок лежит в интервале $0 \le |\Delta| \le \frac{1}{2}$, вершина треугольника выражает полную неопределенность, а сам треугольник определяет область неопределенности ошибки нечеткой конъюнкции. В самом деле, при $\underline{a} = \underline{\bar{b}} = \frac{1}{2}$ по

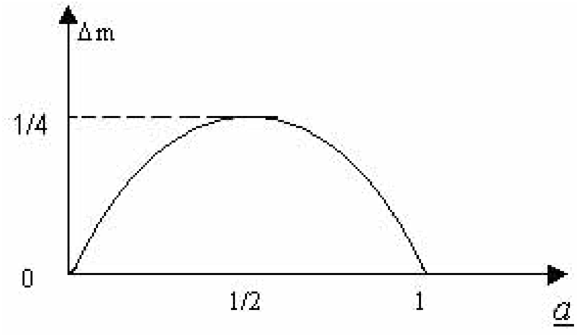


формулам нечеткой логики конъюнкция $\mu_a \cdot \mu_b = min(\mu_a, \mu_b) = \frac{1}{2}$, а истинное значение логического произведения $a \cdot b = 0$, нечеткая дизъюнкция $\mu_a + \mu_b = max(\mu_a, \mu_b) = \frac{1}{2}$, а истинные значения логической суммы равна $\underline{a+b} = 1$ и ошибка логических операций в нечеткой логике равна $\frac{1}{2}$.

В системах дискретного моделирования и принятия решений помимо минимаксной нечеткой логики Заде нашла применение так называемая **вероятностная нечеткая логика**, в которой коньюнкция и дизьюнкция определяются не минимальным и максимальным объемом двоичных признаков, а вероятностями коньюнкции и дизьюнкции в предположении независимости признаков. Исходная информация этого варианта размытой логики, получаемая внелогическими методами, та же, что и в логике Заде, и так же не учитываются частотные и логические связи между признаками.

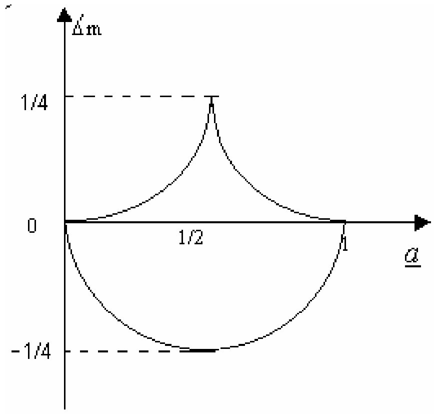
Оценим дополнительные к выражениям табл. 1 ошибки нечетких операций этого логического приближения: $a \hat{\cdot} b = \underline{a} \cdot \underline{b}$, $a \hat{+} b = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b}$. Из этих формул сразу следует, что ошибка сложения равна, как и в логике Заде, с обратным знаком ошибке умножения $\Delta_\bullet = -\Delta_+ = \underline{a} \cdot \underline{b} - \underline{ab}$, где вычитаемое есть неизвестное истинное значение удельного объема произведения. Максимальное значение ошибки проявляется при позитивной или негативной логической связи логических признаков с коэффициентом корреляции $r = \pm 1$.

Пусть признак a вложен в признак b, $r = 1$, $\underline{a} \le \underline{b}, a \to b =$ “из a следует b”, тогда максимальная ошибка сложения $\Delta_+ = \underline{ab} - \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}(1 - \underline{b})$ будет соответствовать минимальному объему большого признака: $\underline{b} = \underline{a}$ т.е. $\Delta_m = \max \Delta_+ = \underline{a} - \underline{a}^2$, равна дисперсии, квадратической неопределенности меры истинности признака a.



Пусть теперь признаки несовместны, $r=-1$, $\bar{a}\to b=$ "из не$-a$ следует b", тогда максимальная ошибка умножения $\Delta_{\bullet}=\underline{a}\cdot\underline{b}-\underline{ab}$ соответствует максимальному объему меньшего признака $a=b\leq\frac{1}{2}$, $\Delta'_m=\max\Delta_{\bullet}=\underline{a}^2$. При $\underline{a}=\underline{b}>\frac{1}{2}$ несовместность нарушается: $\underline{ab}>0$, $r>-1$, и максимальная ошибка равна $(1-\underline{a})^2$ – с увеличением объемов признаков ошибка уменьшается до нуля.

Итак, поскольку максимум ошибки умножения равен минимуму ошибки сложения, то эти ошибки лежат в интервале $-\frac{1}{4}\leq\Delta\leq\frac{1}{4}$ и, в отличие от логики Заде, имеют систематические и случайные составляющие в разных классах априорики. Диаметр D_{Δ} области неопределенности (вариаций) дополнительной ошибки размытого вероятностного приближения полностью совпадает с соответствующим диаметром логики Заде: полный диаметр $D_{\Delta}=\max\Delta-\min\Delta=\frac{1}{2}$, совпадает и его



зависимость от объема признака $D_{\Delta}(\underline{a})=\begin{cases}\underline{a} \;\; при \;\; \underline{a}\leq\frac{1}{2}\\ 1-\underline{a} \;\; при \;\; \underline{a}>\frac{1}{2}\end{cases}$, эта функция совпадает с кусочно-линейной мерой неопределенности суждения $\underline{a}$: $D_{\Delta}(\underline{a})=ql(\underline{a})$. Совпадение интервалов неопределенностей $\Delta_{\cdot}(\underline{a})=D_{\Delta}(\underline{a})$ погрешностей бинарных операций минимаксной и вероятностной нечетких логик не является случайным: обе логики используют одну и ту же априорную (внелогическую) и апостериорную информацию $\{\underline{a},\underline{b}\}$, от которой, прежде всего, зависит точность вычисления конъюнкции и дизъюнкции, и только потом от способов их определения. Отсюда следует практический вывод о необходимости накопления и оптимальной обработки априорных данных, которыми нередко пренебрегают (в частотной логике – это смешанные моменты логических признаков).

Итак, из критики размытых логик, троичных, многозначных, выдвинутой Д. Скоттом, а также нечетких логик, приведенной выше, следует вывод: неопределяемые понятия, лежащие в основе предлагаемых формализаций, такие как возможность, нейтральность, нечеткость, функция нечеткой принадлежности, вероятность, правдоподобие и т. п. должны иметь однозначную семантику и конструктивные определения посредством объективированных средств наблюдений и знаковых (информационных) преобразований.

Список литературы

1. *ЗверевГ.Н.* Основания теоретической информатики. Разд.5. Логическая семантика и дискретные аппроксимации. – Уфа, УГАТУ, 1997.– 92 с.
2. *Зверев Г.Н.* Частотная логика – альтернатива классической логике в новых информационных технологиях // Информационные технологии, №11,1998. – С. 2-10.

3. Зверев Г.Н. Объективные многозначные логики в интеллектуальных системах моделирования и обработки информации // Вестник УГАТУ, Т.4, № 1 – Уфа, 2003. – С.20-34.
4. Bolc L., Borowic P. Many-valued logics: Theoretical foundations. Vol. 1. Berlin, 1992.
5. Lukasiewicz J. Logica trojwartosciowa. Ruch Filozficzny. r. V, nr.9, Lwow, 1920.
6. Семантика модальных и интенсиональных логик. – М.: Прогресс, 1981.– 424с.