Логические аппроксимации, лапласовы оценки и корреляционная логика [Журн. “Информационные технологии” № 2, 1999.– С. 35– 40]

Современные информационные технологии и их программно-аппаратные средства основаны на формализме классической логики с двоичной шкалой различимости {да, нет} и истинности {истина, ложь}$\to\{1,0\}$. Однако реальные информационные процессы оперируют искаженными, неполными, противоречивыми фактическими и априорными данными, которым вряд ли возможно приписать однозначную оценку 0 или 1 двоичной шкалы. В таких ситуациях более адекватным описанием является формализм частотной логики [7,9,10], в котором двоичная истинность заменяется частотной истинностью, а логические связи двоичных признаков, свойств и предикатов представлены различными частотными связями. Последние в пределе могут сколь угодно приближаться к строгим логическим оценкам и зависимостям.

Переход от предельных, недостижимых оценок истинности в двоичной шкале $\{1,0\}$ к числовым оценкам истинности в открытом интервале (0,1) позволяет построить логические аппроксимации, которые учитывают искажения и неопределенности фактов и априорики. Целью данной работы является построение оценок истинности логических методов и погрешностей истинности в корреляционном приближении.

Частотная истинность произвольного высказывания $d(x,1) = 1 - q_x$ (аргумента, предиката, логической функции) определяется как частость (доля, шанс, вероятность) значения $a \square 1$ в конечном множестве информационных ситуаций: *X*; численность единичных значений равна 2^U, численность универсума ситуаций N, а редкость значения 2^U определяет частотную меру ложности $1-\underline{a}=q_{\bar{a}}=\dfrac{N-N_a}{N}$ или частость значения c .

Чтобы воспользоваться формулами и алгоритмами частотной логики, необходимо знать не только истинности исходных данных, но и все частотные связи между ними, которые определяются расстоянием, метрикой, ковариацией, корреляцией, гиперкорреляциями и понимаются в информационной семантике как меры информативности, возможности предсказания неизвестных или близости к логической связи между признаками.

В частотной логике основной характеристикой связи качественных двоичных признаков служит смешанный момент $\underline{x}_{ij\ldots k}=M(x_i\cdot x_j\cdot\ldots\cdot x_k)$ – объем пересечения признаков, по которому вычисляются другие характеристики явлений. Численные значения моментов определяются по экспериментальным данным, теоретическим моделям либо совместно обрабатывается фактическая и априорная информация. Получаемые результаты наблюдения, моделирования и обработки обычно подвержены разного рода искажениям, поэтому точные решения частотной логики можно упрощать, заменяя их приближенными и субоптимальными логическими аппроксимациями. Идея логических приближений в частотной шкале истинности основана на частотной упорядоченности признаков и связей между ними, а также на сильной зависимости моментов, которая используется при построении корреляционной логики. Эта идея способствует решению основной проблемы дедукции – *NP*-сложности логических задач.

Корреляционные методы, широко распространенные при решении задач с непрерывными количественными переменными, предполагают знание первых двух моментов распределения векторных величин. Для дискретно-логических задач также полагаем известными только первый

$M(z) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} z_\alpha$ либо второй $M(zz^T) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha+1}^{N} z_\alpha z_\alpha^T$ моменты распределения вектора двоичных признаков $z = (z_1, z_2, ... z_n)^T$, N – число ситуаций (или объектов) предметной области, n – число двоичных признаков объектов, известных, искомых, вычисляемых, – знак транспонирования.

Первый момент $M(z)$ есть вектор размерности n, компоненты которого определяют «объемы» q_i признаков $z_i = 1$ переменных z_i, принимающих в одной из N ситуаций значение 0 или 1: $q_i = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} z_{i\alpha} = \underline{z}_i, 1 < q < n$. Величина q_i есть частость единичного значения z_i, мера истинности высказывания «объект предметики обладает свойством z_i». Второй момент $M(zz^T)$ есть симметричная квадратная матрица порядка n, в диагонали которой стоит первый момент, т.к. $z_{i\alpha}^2 = z_{i\alpha}$, $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, а недиагональные элементы выражают объемы парных пересечений $q_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha} z_{i\alpha} z_{j\alpha}$ – мера истинности высказывания «объект обладает свойствами z_i и z_j», $q_{ij} = q_{ji}$.

Этой информации достаточно для точного вычисления объемов составных признаков, которые получаются унарными и бинарными логическими операциями из заданных входных признаков, но недостаточно для выражения частотных связей нового признака с признаками, отличными от входных.

Обозначим входные признаки двоичной логической операции f через z_i и z_j объемами q_i, q_j и пересечением q_{ij}, а новый составной признак $z = f(z_i, z_j)$ будет иметь объем q_z и пересечения q_{iz}, q_{jz}, q_{ijz}. Здесь f – одна из шестнадцати возможных бинарных логических операций, из них девять функций выражают особенности остальных: $z = \bar{z}_i$ – отрицание, $z_i + z_j$ – сложение (дизъюнкция), $z_i z_j$ – умножение (конъюнкция), $z_i \to z_j$ – импликация, $z_i - z_j$ – вычитание, $z_i \leftrightarrow z_j$ – эквиваленция, $z_i \oplus z_j$ – сложение по модулю 2 (антиэквиваленция), $z_i | z_j$ – И-НЕ (штрих Шеффера), $z_i \downarrow z_j$ – ИЛИ-НЕ (стрелка Пирса). Признак, отличный от z_i, z_j обозначим через z_k, его объем q_k и парные пересечения q_{ik}, q_{jk}, q_{kz}, тройное пересечение – третий момент q_{ijk}. Выражения частотной истинности составных признаков представлены в таблице:

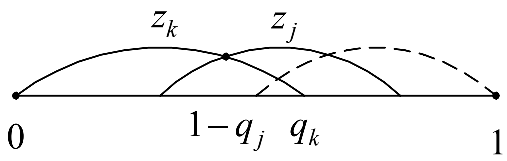
$z = f(z_i, z_j)$	q_z	q_{ijz}	q_{jz}	q_{ijz}	q_{kz}
$\bar{z}_i$	$1 - q_i$	0	$q_j - q_{ij}$	0	$q_k - q_{ik}$
$z_i z_j$	q_{ij}	q_{ij}	q_{ij}	q_{ij}	q_{ijk}
$z_i + z_j$	$q_i + q_j - q_{ij}$	q_i	q_j	q_{ij}	$q_{ik} + q_{jk} - q_{ijk}$
$z_i \to z_j = \bar{z}_i + z_j$	$1 - q_i + q_{ij}$	q_{ij}	q_j	q_{ij}	$q_k - q_{ik} + q_{ijk}$
$z_i - z_j = z_i \bar{z}_j$	$q_i - q_{ij}$	$q_i - q_{ij}$	0	0	$q_{ik} - q_{ijk}$
$z_i \leftrightarrow z_j = z_i z_j + \bar{z}_i \bar{z}_j$	$1 - q_i - q_j + 2q_{ij}$	q_{ij}	q_{ij}	q_{ij}	$q_k - q_{ik} - q_{jk} + 2q_{ijk}$
$z_i \oplus z_j = z_i \bar{z}_j + \bar{z}_i z_j$	$q_i + q_j - 2q_{ij}$	$q_i - q_{ij}$	$q_j - q_{ij}$	0	$q_{ik} + q_{jk} - 2q_{ijk}$
$z_i \| z_j = \bar{z}_i + \bar{z}_j$	$1 - q_{ij}$	$q_i - q_{ij}$	$q_j - q_i$	0	$q_k - q_{ijk}$
$z_i \downarrow z_j = \bar{z}_i \bar{z}_j$	$1 - q_i - q_j + q_{ij}$	0	0	0	$q_k - q_{ik} - q_{jk} + q_{ijk}$

В первой колонке добавлены полиномиальные (дизъюнктивные) формы логических операций. Используя эти формулы, можно последовательно наращивать логические структуры и получать моменты все более сложных составных признаков. Однако в последнем столбце присутствует неизвестный объем тройного пересечения q_{ijk} признаков z_i, z_j, z_k, который выводит оценки истинности из корреляционной теории. Чтобы остаться в рамках корреляционного приближения и избежать вычисления многомерных матриц и интегралов, необходимо найти оценки третьего момента по первым двум и выразить достигаемую точность приближения. В этом и заключается суть корреляционной логики при построении оценок истинности в частотной шкале, их погрешностей и последующем применении их в дискретно-логических задачах принятия оптимальных решений.

Если удастся достаточно точно оценить третий момент по двум первым, то алгоритмы поиска оптимальной или субоптимальной аппроксимации существенно упрощается, т.к. не надо вычислять многомерные интегралы и матрицы моментов, перемножать логические полиномы и их отрицания, а достаточно последовательно наращивать матрицу вторых моментов $M(zz^T)$ составными аппроксимирующими признаками и информативными импликатами и коррелятами.

Найдем граничные значения неизвестного тройного пересечения – момента третьего порядка $q = q_{ijk} = M(z_i \cdot z_j \cdot z_k)$ исходя из априорного значения моментов первого и второго порядка: $q_i, q_j, q_k, q_{ij}, q_{ik}, q_{jk}$ и пусть для определенности $q_i \le q_j \le q_k$. Параметры априорики должны быть согласованы между собой и удовлетворять естественным ограничениям: $0 \le q_i, ..., q_{jk} \le 1$, $b_{ij} \le q_{ij} \le q_i$, $b_{ik} \le q_{ik} \le q_i$ i, $b_{jk} \le q_{jk} \le q_j$, где $b_{ij} = \max(0, q_i + q_j - 1)$, $b_{ik} = \max(0, q_i + q_k - 1)$, $b_{jk} = \max(0, q_i + q_k - 1)$ – параметры зазоров между универсумом ситуаций и суммой объемов двух признаков.

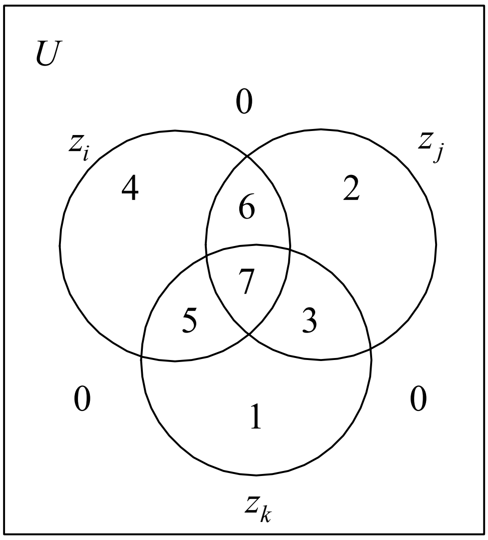
Для вывода этих выражений воспользуемся одномерной диаграммой Эйлера с интервалами – признаками в единичном универсуме и разместим объекты универсума, обладающие признаком $z_k = 1$ в начале универсума [0,1], а затем объекты со свойством $z_j = 1$, тогда минимально возможное значение второго момента q_{jk} при известных q_j и q_k определяется предельным правым положением интервала Эйлера признака z_j (показано штрихом) и равно либо 0 для малых признаков при $q_k \le 1 - q_j$, либо $q_j + q_k - 1$ для больших признаков при $q_k > 1 - q_j$.



Отсюда следует ограничение значений второго момента по известным первым моментам: $b_{jk} \le q_{jk} \le q_j$ и в качестве оценки q_{jk} берется середина интервала неопределенности: $\hat{q}_{jk} = \dfrac{b_{jk} + q_j}{2}$ с предельной ошибкой этой оценки $\Delta_{jk} = \dfrac{q_j - b_{jk}}{2}$. Такого типа оценки частостей являются наилучшими по точности, если вариации неизвестных априорных данных симметричны в допустимом интервале, и называются **лапласовыми** оценками при равномерном распределении частостей q_{jk},.... Если ошибка Δ_{jk} меньше допустимой, то более точный расчет второго момента q_{jk} становится излишним.

Граничные значения неизвестного третьего момента $q = q_{ijk}$ в одномоментном приближении находятся по той же схеме. Прежде найдем оценки верхнего и нижнего предела объема тройного пересечения $q_{\max} \le q \le q_{\max}$ из априорного знания только первых моментов. Добавим в одномерной диаграмме Эйлера наименьший признак z_i, его необходимо представить в общем случае двумя несвязными интервалами суммарной длиной q_i. Верхняя граница $q_{\max}$ определяется объемом минимального признака при вложенности трех признаков, а нижняя граница определяется таким размещением в универсуме объектов со свойством $z_i = 1$, которое по возможности не образует тройного пересечения в интервалах [0, $1 - q_j$] и [q_k,1], отсюда при $q_i > 1 - q_j + 1 - q_k$

обязательно возникнет тройное пересечение $q > 0$, следовательно, первые моменты ограничивают искомую величину q снизу, если признаки большие, при $S_1 = q_i + q_j + q_k > 2$, значит, $q_{\min} = \max(0, S_1 - 2)$, $q_{\max} = q_i$, лапласова оценка третьего момента $\hat{q} = \dfrac{q_{\min} + q_i}{2}$ с ошибкой $\Delta q = \dfrac{q_i - q_{\min}}{2}$.



Для определения границ q в корреляционном, двухмоментном приближении по известным первым и вторым моментам трех признаков представим на двумерной диаграмме Эйлера случай общего положения, при котором признаки разбивают универсум на максимальное число $2^3 = 8$ классов объектов, различимых по этим свойствам и занумеруем эти классы в соответствии с двоичным представлением числа $z_i z_j z_k$ от $0 = 000$ до $7 = 111$. Объемы элементарных классов выражаются через трёхмоментную априорику так:

$q_0 = 1 - S_1 + S_2 - q$, $\qquad q_1 = q_k - q_{ik} - q_{jk} + q$,

$q_3 = q_{jk} - q$, $\qquad q_2 = q_j - q_{ij} - q_{jk} + q$,

$q_5 = q_{ik} - q$, $\qquad q_4 = q_i - q_{ij} - q_{ik} + q$,

$q_6 = q_{ij} - q$, $\qquad q_7 = q$,

где суммы первых и вторых моментов есть $S_1 = q_i + q_j + q_k$, $S_2 = q_{ij} + q_{ik} + q_{jk}$. В эти формулы входит неизвестная величина q слева со знаком минус, справа – со знаком плюс. Объемы классов $q_0, q_1, \ldots, q_7$ не могут быть отрицательными, поэтому из левой группы получаем четыре ограничения величины тройного пересечения сверху, а из правой группы –

ограничения снизу и из них выбираем наиболее сильные ограничения: $q_{\min} = \max(0, b_i, b_j, b_k)$, $q_{\max} = \min(q_{ij}, q_{ik}, q_{jk}, S_0)$, где зазоры $b_i = q_{ij} + q_{ik} - q_i$, $b_j = q_{ij} + q_{jk} - q_j$, $b_k = q_{ik} + q_{jk} - q_k$, сумма $S_0 = 1 - S_1 + S_2$. В этих формулах не предполагается упорядоченность признаков z_i, z_j, z_k по их объемам.

Легко проверить, что одномоментные ограничения q снизу и сверху в двухмоментном приближении становятся излишними, но все величины, входящие в $q_{\min}$ и $q_{\max}$ являются значимыми и определяют лапласову оценку третьего момента и его максимальной ошибки

$$\hat{q}_{ijk} = \frac{q_{\min} + q_{\max}}{2}, \qquad \Delta_{ijk} = \frac{q_{\max} - q_{\min}}{2} \tag{1}$$

Найдем условия, при которых интервал $[q_{\min}, q_{\max}]$ неопределенности q_{ijk} стягиваются в точку. Во-первых, это случай отрицательной логической связи хотя бы одной пары признаков, например, $r_{ij} = -1$, тогда $q_{ij} = 0$, $b_i \leq 0$, $q_{\min} = q_{\max} = q_{ijk} = 0$. Во-вторых, при сильной положительной связи любой пары признаков, скажем, $r_{ij} \to 1$, интервал неопределенности также стягивается в точку. В самом деле, при вложении меньшего признака в больший, два элементарных класса из восьми исчезают, например, при вложении $z_i \to z_j$ сразу следует $q_4 = q_5 = 0$, отсюда $q_{jk} = q_{ik}$. Следовательно, сильные положительные и отрицательные корреляционные связи могут не уменьшая третьи моменты, резко повышать точность логических аппроксимаций в корреляционном приближении.

Итак, если хотя бы один из коэффициентов корреляции r_{ij}, r_{ik}, r_{jk} по модулю равен единице, то третий момент вычисляется точно: $q_{ijk} = q_{\min} = q_{\max}$. Максимальная погрешность корреляционной логики проявляется в ситуациях с попарной независимостью признаков $r_{ij} = r_{ik} = r_{jk} = 0$. При полной независимости признаков справедлива точная оценка $\hat{q}_{ijk} = q_i q_j q_k$, которая служит простейшей аппроксимацией третьего момента. Были предложены и другие аппроксимации, например, в [9]. В двухмоментном приближении простой вид имеет формула $\hat{q}_{ijk} = \dfrac{q_{ij} q_{ik} q_{jk}}{q_i q_j q_k}$, которая в случае попарной независимости совпадает с предыдущим выражением, основанным на гипотезе полной независимости признаков. Точность этих приближений зависит от размеров признаков и уровня тернарной и парных связей между ними.

Найдем предельные ошибки оценок тройного пересечения признаков в наиболее неблагоприятном случае попарной независимости признаков: $r_{ij} = r_{ik} = r_{jk} = 0$, полагая упорядоченность их объемов $q_i \le q_j \le q_k$. Учитывая соотношения некоррелированности $q_{ij} = q_i q_j$, $q_{ik} = q_i q_k$, $q_{jk} = q_j q_k$, легко найти минимальное значение третьего момента $q_{\min} = \max(0, b_i)$; максимальное значение q_{ijk} находится по минимуму q_{ij} и S_0. Найдем разность этих величин

$$q_{ij} - S_0 = q_{ij} - 1 + q_i + q_j + q_k - q_{ij} - q_{ik} - q_{jk} = (1 - q_k)(q_i + q_j - 1), \qquad (2)$$

значит, $q_{\min} = q_i q_j$ для малых признаков: $q_i + q_j < 1$, и $q_{\min} = S_0$ для больших признаков. В результате получаем три интервала неопределенности тройного пересечения попарно независимых признаков, определяемые по точно заданным моментам первого и второго порядка:

$$0 \le q_{ijk} \le q_{ij} \text{ при } q_j + q_k \le 1,$$

$$b_i \le q_{ijk} \le q_{ij} \text{ при } q_i + q_j \le 1 \le q_j + q_k,$$

$$b_i \le q_{ijk} \le S_0 \text{ при } q_i + q_j > 1.$$

В итоге получаем оценки сверху точности двухмоментного приближения, $q_i \le q_j \le q_k$:

$$\Delta_{ijk} \le \begin{cases} \frac{1}{2} q_i q_j & \text{при} \quad q_j + q_k \le 1, \\ \frac{1}{2} q_i (1 - q_k) & \text{при} \quad q_i + q_j \le 1 \le q_j + q_k, \\ \frac{1}{2} (1 - q_j)(1 - q_k) & \text{при} \quad q_i + q_j > 1, \end{cases} \qquad (3)$$

которые определяют границы применимости чистой корреляционной логики без привлечения иных оценок высших моментов. В ситуациях с недопустимо высоким уровнем погрешности Δ_{ijk} момент q_{ijk} должен оцениваться внелогическими методами. Следует заметить, что погрешность приближения не зависит от способа кодировки номинативных признаков и переход от признаков к их отрицаниям, скажем, от больших позитивных к малым негативным, не изменяет точность аппроксимации, в то время как коэффициент корреляции признаков может сильно измениться при переходе к другой арифметизации номинативных признаков. Это обусловлено характером зависимости q_{ijk} от априорики *J,* определяющей фактически семь независимых уравнений от восьми неизвестных объемов элементарных классов.

С ростом числа признаков экспоненциально увеличивается сложность дискретно-логических задач, но одновременно экспоненциально возрастает и частотная зависимость между признаками и уменьшение их совокупной информативности, что увеличивает возможности логических аппроксимаций. Мера зависимости определяется гиперкорреляцией и частотной связностью. **Гиперковариацию** трех признаков определим так же, как парную ковариацию: если признаки независимы, то $q_{ijk} = q_i q_j q_k$, поэтому тернарная ковариация $K_{ijk} = q_{ijk} - q_i q_j q_k$. Минимальное значение она приобретает при нулевом третьем моменте: $q_{ijk} = 0,$ тогда $K_{ijk} = -q_i q_j q_k$, для этого достаточно (но не необходимо), чтобы одна из трех парных связей стала предельной отрицательной, скажем, $r_{ij} = -1$. Максимального значения тройная ковариация достигает при вложении меньшего признака z_i в пересечение $z_j z_k$ оставшихся больших $z_i \le z_j z_k$, тогда $q_{ijk} = q_i = q_{ij} = q_{ik} \le q_{jk}$, и наибольшая гиперковариация есть max $K_{ijk} = q_{ijk} - q_i q_j q_k = q_i(1 - q_j q_k)$, следовательно, множественный коэффициент корреляции трех битовых признаков – гиперкорреляция, удовлетворяющая условию нормировки $-1 \le r_{ijk} \le 1$, определяется формулой

$$r_{ijk} = \begin{cases} \dfrac{K_{ijk}}{q_i q_j q_k} \text{ при } K_{ijk} \le 0, \\ \dfrac{K_{ijk}}{q_i\left(1 - q_j q_k\right)} \text{ при } K_{ijk} > 0, \end{cases} \qquad (4)$$

где $q_i \le q_j \le q_k$. Эта формула легко переносится на произвольное число признаков и моменты высших порядков, в частности, при $q_k = 1$ она воспроизводит парную корреляцию r_{ij}.

Введенная гиперкорреляция, как и в случае парных связей, обладает тем недостатком, что не всегда отражает близость к предельной логической зависимости признаков, например, мера $r_{ijk} = 0$ – признаки некоррелированы, но существует логическая связь – импликация $z_i z_j \to z_k$, когда пересечение двух признаков целиком лежит в третьем признаке. Логическая связь между двоичными признаками или их отрицаниями возникает в случае, если хотя бы один из моментов $M(z_i^\alpha \cdot z_j^\beta \cdot z_k^\gamma) = q_{ijk}^{\alpha\beta\gamma}$ произведения признаков равен нулю, т.е. признаки не пересекаются и удовлетворяют уравнению $z_i^\alpha z_j^\beta z_k^\gamma = 0$, здесь $\alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 0, 1\}$, $z^{-1} = \bar{z}$, $z^0 = 1$, $z^1 = z$. Аналогом корреляционного отношения для качественных признаков является их **максимальная частотная связность** $s_m = s_m(z_i, z_j, z_k) = \max\limits_{\alpha,\beta,\gamma}(1 - q_{ijk}^{\alpha\beta\gamma})$, которая при $q_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} = 0$

принимает значения предельной (логической) связности $s_m = 1$. Максимальная связность трех признаков лежит в интервале $1-2^{-3} = \frac{7}{8} \le s_m \le 1$, а в общем случае k признаков предельный уровень момента $\max\limits_{q(u)} \min\limits_{\alpha,\beta,\dots} q = 2^{-k}$, отсюда $1-2^{-k} \le s_m \le 1$, т.е. с ростом числа признаков экспоненциально уменьшается добавочная полезная информация.

Рассмотрим пример использования аппарата корреляционной логики для оценки достоверности логического вывода по схеме отделения модус поненс: a, $a \to b \vdash b$ – «если истинны высказывания “a” и “из a следует b”, то высказывание b также истинно». В реальности факт a и правило $a \to b$ не бывают абсолютно истинными, поэтому интересно оценить ошибки Δb заключения $\underline{\hat{b}}$ по известным ожидаемым искажениям факта и правила. Пусть задан информационный процесс выявления ВИЧ инфицированных $b=1$ пациентов по результатам анализа крови a – по наличию антител в крови пациента $a=1$. Ошибки посылки a связаны с лабораторными погрешностями v, влияющими на результат анализа: $\bar{a} = a \oplus v$ – при отсутствии ошибки лабораторного анализа $v=0$, оценка $\hat{a} = a$, а при ее наличии $v=1$, оценка $\hat{a} = \bar{a}$. Ошибки идеального логического правила $a \to b$ по формулам частотной логики (см. таблицу) равны ошибке импликации $\Delta b_{im} = 1 - \underline{a \to b} = \underline{a} - \underline{ab}$ в ситуациях $a=1$, $b=1$. В реальной импликации a заменяется на оценку: $\hat{a} \to b = a \oplus v \to b = a \leftrightarrow v + b = av + \bar{a}\bar{v} + b$. Истинность этого логического полинома по формулам частотной логики равна $\underline{\hat{a} \to b} = \underline{av} + \underline{\bar{a}\bar{v}} + \underline{b} - \underline{abv} - \underline{\bar{a}\bar{v}b}$ – остальные произведения признаков равны нулю. Ошибка логического вывода: $\Delta b = 1 - \underline{\hat{a} \to b} = \underline{a} - \underline{ab} + \underline{v} - 2\underline{av} - \underline{bv} + 2\underline{abv}$.

В корреляционном приближении последнее слагаемое неизвестно и оценивается по объемам признаков и их парных пересечений. Например, $\underline{a} = 0.55$, $\underline{b} = 0.5$, $\underline{ab} = 0.45$, $\underline{v} = 0.06$, $\underline{av} = 0.04$, $\underline{bv} = 0.03$, тогда оценка тройного пересечения по формулам корреляционной логики лежит в интервале $0.01 \le \underline{abv} \le 0.03$, т.е. $q_{ijk} = 0.02 \pm 0.01$. Ошибка чистой позитивной импликации $\underline{a \to b}$ – «если в крови есть антитела, то пациент поражен СПИДом» равна $\Delta_{im} = \underline{a} - \underline{ab} = 10\%$, оценка ошибки реальной импликации в корреляционном приближении $\Delta\hat{b} = 9 \pm 2\%$, т.е. ошибки наблюдений v частично скомпенсируют ошибку чистой импликации, а ошибка обратной импликации $b \to a$, равной чистой негативной импликации $\overline{a} \to \overline{b}$ – «если в крови нет антител, то пациент не поражен СПИДом» равна $\underline{b} - \underline{ab} = 5\%$.