УДК 519: 512

Зверев Г.Н. , д-р техн. наук,
Уфимский государственный авиационный технический университет

Частотная логика – альтернатива классической логике в новых информационных технологиях

Частотная логика – естественное обобщение классической логики, которое учитывает размытие и искажения фактической и априорной информации. Если доли ошибочных и априорных данных равны нулю, то частотная логика точно воспроизводит классическую. Средства оценки достоверности результатов частотной логики позволяют строить логические аппроксимации и приближенные решения дискретных задач.

Современная математическая логика относится к области фундаментальных знаний, так называемых “вечных истин”, которые, как известно, время от времени подвергаются критике, попыткам опровержения и усовершенствования. Логика лежит в основаниях математики и научных теорий всех без исключения предметных областей. К их числу относится теоретическая и прикладная информатика, что в свое время послужило поводом авторам японского проекта ЭВМ пятого поколения положить исчисление предикатов в основу своей разработки программно-аппаратных средств искусственного интеллекта.

Логические понятия обычно считаются более фундаментальными, чем понятия предметных областей математики, естественных и технических наук. Отсюда делается как бы очевидный вывод, что определение логического понятийного базиса, конструирование и исчерпывающее объяснение составляющих его понятий невозможно выполнить, используя понятия более конкретных предметик, не попав при этом в порочный логический круг. Этот традиционный взгляд с развитием теоретической информатики подвергся глубокому критическому анализу и принципиальному уточнению. Более полная формализация информационных процессов получения и преобразования знаков, их значений, оценок адекватности получаемых результатов позволяет построить иные основания логики, представить в новом базисе логические понятия, снабдив их однозначной информационной семантикой.

Прежде, чем подступиться к этой проблеме, необходимо выяснить, что конкретно не устраивает предметников и, прежде всего специалистов по автоматизации человеческой деятельности и информационным технологиям в формальном аппарате и смысловых конструкциях классической логики. Здесь мы выделим четыре основные позиции, по которым чаще всего возникают критические выпады в адрес современной логики и многочисленные попытки ее усовершенствования, обозначаемые общим термином: **неклассические логики**.

Первое критическое положение можно выразить так: неполная формализация семантики классической логики, в частности, базисного понятия истинности и его разновидностей – аристотелевой (экспериментальной, фактической) и формальной (теоретической, логической) истинности или ложности знаковых конструкций. Специалисты предметных областей обычно выделяют разные виды истинности и лжи, различные типы ошибок, им “тесно” в двоичной шкале истинности, а переходы в математических теориях к многозначным логикам и частично упорядоченным логическим шкалам происходят вообще с потерей первичного смысла истинности. Подобное происходит и в абстрактных формализмах логики и теории алгоритмов при замене понятия истинности далекими от него понятиями выводимости, доказуемости, разрешимости. В некоторых публикациях последних лет - см., например [1], интерпретация понятия истинности по-прежнему объявляется не вполне ясной и недостаточно формализованной.

Второе основание быть неудовлетворенным логическими исчислениями и их семантикой состоит в предельной идеализации информационного процесса получения и преобразования данных и моделей, гипотетически или постулативно-свободного в математической логике от каких - либо искажений. Между тем информационная практика естественных, технических и гуманитарных наук имеет дело с реальными знаковыми ситуациями, весьма далекими от логико-математического идеала. Неадекватность формализации действительных информационно-логических процессов сильно затрудняет и ограничивает применение в автоматизированных системах логических методов, ведет к замене их эмпирическими, эвристическими приемами, которые хоть как-то учитывают искажения, неполноту, противоречивость и размытия данных и моделей.

Третий повод для критики классической логики, вытекающий из второго, состоит в том, что в отличие от многих других формализаций, логика не допускает приближенных решений и логических аппроксимаций, которые естественно напрашиваются в процессах с неполными и противоречивыми данными. С этими соображениями увязывается и наш последний критический тезис. Основной проблемой дедукции в рамках формализма классической логики считается комбинаторная сложность алгоритмов, экспоненциальный рост времени и памяти логических процессов при увеличении размерности задачи и числа альтернатив переборов.

В известных работах по неклассическим логикам – см., например [2-6], предложено много способов и путей возможного расширения и усовершенствования классического формализма математической логики, получившие такие названия, как модальная, многозначная, индуктивная, вероятностная, правдоподобная, нечеткая и др. логики. К сожалению, эти попытки не достигли той универсальности, семантической ясности и определенности, которые присущи классической логике, а самое главное, в них отсутствует аппарат оценки и доказательства истинности, достоверности результатов, не определены условия и границы применимости предлагаемых формальных конструкций.

Цель данной работы – построить более полную формализацию информационно-логического процесса, уточнить понятия истинности и неопределенности его результатов, получить строгие обобщения классической логики, адекватные реальным информационным процессам исследования, проектирования, управления, неотъемлемым свойством которых является отягощенность ошибками, неопределенность (неполнота, противоречивость, искаженность) фактических данных и теоретических моделей. Обобщенный формальный аппарат позволяет построить логические аппроксимации, оптимальные по заданным критериям точности, скорости, компактности, универсальности логических алгоритмов.

Современные логические исчисления являются продуктом формализации двух взаимосвязанных, но не вполне изученных информационных явлений – мышления и речи человека, поэтому в процессе развития логики постоянно возникает проблема адекватности формализмов мыслительным и естественно-языковым конструкциям, которая традиционно разрешается ссылками на интуитивную ясность, непосредственную очевидность, полное соответствие логической формулы – **модели**, образа и исходного знакового объекта – прообраза или **комодели** формализма. Однако субъективная ясность и очевидность адекватности с позиции математической интуиции иногда ведет к ошибкам и парадоксам.

Успехи теоретической информатики позволили предложить иной подход к обоснованию логики и построению информационной семантики логических формализмов. Суть подхода состоит в замене размытого представления о субъективной математической интуиции строгим понятием **объективированного субъекта**, снабженного точно определенными средствами получения и преобразования информации. Примерами объективированного субъекта *obsubj* служат системы искусственного интеллекта, роботы, автоматы, измерительновычислительные системы, программно-аппаратные реализации символьных моделей логико-математического процессора, человек (математик, логик), если его поведение строго соответствует полученным инструкциям.

Система *obsubj* теоретически имеет однозначно определенную структуру и функции, которые с очевидностью материально реализуемы, воспроизводимы в соответствии с законами природы и которые, по сути, определяют формализованную математическую интуицию. Подобное материальное воплощение системы *obsubj* очевидно затушёвывает грань между физическим и знаковым, материальным явлением и информационным представлением реальности, между объектом и изучающим и рассуждающим субъектом.

Чтобы уточнить эту границу, введем четыре типа процессов материально-информационного мира – физической реальности Real = R и её модельного знакового представления Model = M в системе *obsubj.* **Материальный** процесс $F\colon R \to R'$ есть преобразование физической реальности, выполняемое управляемым функциональным объектом F – материальным процессором, либо это преобразование, изменение реальности происходит в естественном процессе взаимодействия физических тел. **Сенсо́рный** процесс $A\colon R \to M$ есть преобразование свойств реальности в знаки – информационные объекты модельного мира M внутри *obsubj.* Это преобразование выполняет материально-информационный процессор – **сенсо́р** A. **Рефо́рный** процесс $B\colon M \to M'$ преобразует, реформирует знаки модельного мира в новые знаки – результаты рассуждений, вычислений, решений. Он реализуется информационным, знаковым процессором – **рефо́ром** B, входящим в состав системы *obsubj.* **Эффекторный** процесс $E\colon M \to R$ преобразует информационные объекты мира знаков в физические воздействия, предметы, изделия, он выполняется информационно-материальным процессором – **эффектором** E. Граница между материальным объектом и субъектом *obsubj* определяется наличием в последней системе знаков и процессоров A, B либо E.

В классической логике изучены предельно простые знаковые процессы без искажений и противоречий, поэтому формализацию информационно-логической семантики начнем с построения идеального информационного процесса произвольной предметики. Идеализация и предельное упрощение модели процесса состоят в следующем:

– материальный или знаковый мир предметики состоит из конечного набора объектов *obj* – замкнутого универсума предметики $U=\{obj\}_N$ мощностью $N = |U| < \infty$ - здесь мы абстрагируемся от проблемы бесконечности;

– все объекты универсума являются неизменными и доступными для исследования - это абстракция от недостижимости и изменчивости отдельных фрагментов действительности, от динамики реального мира, его стохастичности и случайности данных о нем;

– объективированный субъект *obsubj* вооружен идеальными процессорами – сенсорами {A}, рефорами {B}, эффекторами {E}, которые считаются всюду определёнными на универсуме предметики, работают без ошибок и не вносят искажений в результаты материально-информационных преобразований, кроме того, временем их работы можно пренебречь, так что субъект изучает все N объектов предметики, имея о каждом объекте и, следовательно, обо всём универсуме U полную и достоверную информацию.

Заключительный шаг определения идеального информационно-логического знакового процесса состоит в переводе всех значений свойств и связей $\{x\}$ в двоичную шкалу {да, нет} либо {0, 1}, для этого многозначные дискретные числовые (количественные) либо нечисловые (качественные) сенсоры и рефоры представим конечными наборами сенфоров с двоичными выходными результатами – значениями свойств и связей в оппозиционных шкалах типа {белый, небелый}, {четный, нечетный}, {лысый, волосатый} и т.п., которые мы заменим абстрактной номинативной {да, нет} либо числовой битовой шкалой {0, 1}, а для непрерывных количественных величин вводится порог различимости $\Delta_П(x)$, который определяет дискретизацию и двоичное представление вещественных значений сенсоров, и уровень точности – допустимой погрешности $\Delta < \Delta_П(x)$ идеального информационного процесса.

Теперь о естественных ограничениях идеального процесса. Число знаков, которыми оперирует *obsubj,* и число процессоров в нем ограничено, как и их информативность при различении, распознавании объектов универсума по их свойствам и связям, при этом полагаем, что субъект вооружен счетчиком $N(x)$ числа неразличимых объектов по каждому значению свойства $x = AB(obj)$, поэтому универсум предметики U в представлении объективированного субъекта есть **сомножество** объектов, а не математическое множество однозначно распознаваемых элементов, которое характеризуется двоичной функцией принадлежности $\varepsilon(obj) \in \mathrm{Bit} = \{0,1\}$.

Сомножество, в отличие от множества, содержит неразличимые копии и характеризуется распределением численности $N(x)$ или частости $q(x) = \dfrac{N(x)}{N}$ объектов универсума со свойствами или связями, выраженными произвольным информационным объектом x и его возможными значениями, при этом на универсуме U выполняются условия: $\sum_x N(x) = N$, $\sum_x q(x) = 1$ – распределения нормированы конечным объемом универсума.

Итак, определение идеального знакового процесса предполагает, что мир объектов, знаков конечен, в нем отсутствуют ошибки преобразований, а изменения знаков происходят контролируемым образом и все знаки могут быть представлены без ошибок дискретизации и бинаризации в многомерных двоичных (логических) шкалах в виде сомножеств информационных объектов и соответствующих им неизменных, статических распределений численности $N(x)$ или частости $q(x)$. В последнем случае, очевидно, выполняется абстракция от численности классов объектов предметики, но отличная от подобной абстракции в классической логике и теории множеств, которая осуществляется посредством поглощения неразличимостей $\{x,x\}=\{x\}$, что равносильно переходу от распределения численности $N(x)$ к двоичной функции принадлежности $\varepsilon(x)$.

Так как процессоры субъекта определены всюду на конечном универсуме и представлены в двоичных шкалах, то априори (по определению) выполняется закон исключенного третьего: “да или нет, третьего не дано” и однозначно определяется операция отрицания $\overline{x}$ свойства x: $\overline{\text{да}} = \text{нет}$, $\overline{\text{нет}} = \text{да}$, $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ в идеальном информационном процессе без неопределенностей.

Ошибки и неопределенности в таком идеальном замкнутом мире возникают при естественном в рассуждениях субъекта переходе от объемов понятий – их **дентов** (индивидов и их сомножеств) к смысловому содержанию понятий, точнее, к их **контам** (концептам, коннотатам), т.е. к косвенным значениям понятий, представленных знаковыми объектами $\{x\}$ внутри системы *obsubj* [7].

Прежде всего, найдем связи между двумя бинарными свойствами объектов универсума $a(obj)$ и $b(obj)$, $a,b \in Bit = \{0,1\}$, а также их отрицаниями $\bar{a},\bar{b}$. Число объектов, обладающих свойствами $a = b = 1$, обозначим через N_{ab}, аналогично для сочетаний позитивных и негативных значений свойств a,b и в сумме численности составляют весь объем универсума: $N_{ab} + N_{\bar{a}b} + N_{a\bar{b}} + N_{\bar{a}\bar{b}} = N,$ для частостей $q_{ab} + q_{\bar{a}b} + q_{a\bar{b}} + q_{\bar{a}\bar{b}} = 1,$ поэтому при абстрагировании от численности достаточно определить три числа из четырех, в качестве которых удобно взять первые и второй смешанный моменты распределения:

$q_a = q_{ab} + q_{a\bar{b}} = \dfrac{N_a}{N}$ – относительный объем признака $a = 1$ в универсуме U, $q_b = q_{ab} + q_{\bar{a}b}$ – относительный объем признака b, q_{ab} – относительный объем признака $a \cdot b = 1$. Тем самым мы определили **шкалу частотной истинности** $0 \le q \le 1$ высказываний и предикатов: "да, объекты универсума обладают свойством a с частостью q_a" и если всем объектам присуще свойство a, $N_a = N$, то $q_a = 1$. Частотная истинность отрицательного высказывания $\bar{a} =$"объекты универсума не обладают свойством a" равна $1 - q_a$ и если $N_a = 0$, $N_{\bar{a}} = N$, то это высказывание истинно во всем универсуме: $q_a = 0$, $q_{\bar{a}} = 1 - q_a = 1$.

Представим некоторый набор двоичных свойств объекта вектором $x = (a, b, \ldots)$, а меру частотной истинности произвольной логической функции $f(x)$ обозначим подчеркиванием $\underline{f}(\underline{x})$ либо угловыми скобками $\lfloor f(x) \rfloor$. Если истинность логической формулы равна 1 или 0, то между свойствами набора x существует **логическая связь**, в противном случае при $0 < q < 1$ между свойствами набора x наблюдается лишь **частотная связь**, выражаемая логической функцией f, либо в пределе двоичные признаки независимы.

Итак, частотная размытая связь есть очевидное обобщение строгой логической связи с тем же уровнем универсальности, общезначимости и независимости от конкретной семантики предметных областей. Мерой зависимости двоичных признаков a и b в универсуме U, как и для числовых признаков, служит ковариация K_{ab} или корреляция r_{ab}, понимаемые в информационной семантике как абстракции от способа построения универсума U – детерминированного либо случайного отбора объектов предметики, т.е. здесь имеется в виду обобщённая семантика, отличная от стохастики или случайности вероятностно-статистических представлений.

Ковариация $K_{ab} = M(ab) - M(a)\cdot M(b) = q_{ab} - q_a \cdot q_b$, где $M(a) = \frac{1}{N}\Sigma a(obj) = q_a$, $M(b) = \frac{1}{N}\Sigma b(obj) = q_b$, $M(ab) = \frac{1}{N}\Sigma a(obj)b(obj) = q_{ab}$ – суммирование двоичных значений свойств в вещественной арифметике производится по всем объектам универсума. Коэффициент корреляции битовых признаков на универсуме U есть нормированная к интервалу $-1 \le r_{ab} \le 1$ ковариация и определяется так [8]: $r_{ab} = \frac{K_{ab}}{q_a \cdot q_b}$ при $K_{ab} < 0$ – отрицательной частотной связи двоичных признаков a и b, а если связь положительная, то $r_{ab} = \frac{K_{ab}}{q_1 \cdot (1-q_2)}$, где $q_1 = \min\{q_a, q_b\}$, $q_2 = \max\{q_a, q_b\}$. Значение $K_{ab} = r_{ab} = 0$ определяет условие независимости признаков (a,b) и их отрицаний $(a,\bar{b}),(\bar{a},b),(\bar{a},\bar{b})$, т.е., в отличие от вещественных признаков, некоррелированность двоичных признаков означает их строгую независимость [7].

Предельные значения коэффициента корреляции выражают положительную и отрицательную логическую связь признаков: 1) $r_{ab} = 1$, $q_{ab} = q_1$ – малый признак вложен в большой, скажем, $q_1 = q_a$, тогда $N_{a\bar{b}} = 0$, $q_{a\bar{b}} = 0$ и справедливы две эквивалентные импликации $a \to b =$ “если a, то b” и $\bar{b} \to \bar{a} =$ “если не $-b$, то не $-a$”; 2) $r_{ab} = -1$ – признаки несовместимы, $q_{ab} = 0$ и справедливы импликации $a \to \bar{b}, b \to \bar{a}$. При равенствах $q_{\bar{a}b} = 0$ и $q_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ возникает еще два вида логических связей и соответствующие им две пары равных импликаций: 3) $b \to a$, $\bar{a} \to \bar{b}$; 4) $\bar{a} \to b$, $\bar{b} \to a$. Других видов логических связей двух признаков нет, если не учитывать их сочетание при одновременном выполнении двух или трех частотных уравнений из четырех возможных, когда возникает эквивалентность признаков либо их вырождения $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ (равенство нулю всех четырех объемов невозможно, т.к. их сумма равна объему универсума). Заметим, что наличие логической связи между признаками или их отрицаниями отмечается предельными значениями трех из четырех коэффициентов корреляции: r_{ab}, $r_{\bar{a}b}$, $r_{a\bar{b}}$, $r_{\bar{a}\bar{b}}$, а отсутствие логической связи между парой значений признаков ничего не говорит о силе связи, сходстве или различии позитивных и негативных значений и соответствующих им классов объектов.

Для определения мер сходства или различия между классами объектов введем в пространстве числовых либо нечисловых признаков этих классов функцию расстояния и метрику. **Информационное частотное расстояние** $d'(x,y)$ между двоичными признаками x и y есть функция, удовлетворяющая трем аксиомам: 1) $d'(x,y) \geq 0$ для любых свойств x, y и классов объектов с этими свойствами – аксиома неотрицательности частотного расстояния; 2) $d'(x,y) = d'(y,x)$ – аксиома симметрии; 3) $d'(x,y) \leq 1$ – аксиома нормирования частотного расстояния: $d' = 1$ при несовместимости свойств x и y и соответствующих им классов объектов. **Информационная частотная метрика** $d(x,y)$ в пространстве двоичных признаков кроме этих требований удовлетворяет еще двум аксиомам: 4) аксиоме тождества – "если $d(x,y) = 0$, то $x = y$", и 5) аксиоме треугольника: $d(x,y) + d(x,z) \geq d(y,z)$.

Пять аксиом частотной метрики выполняются для выражения $d(x,y) = \dfrac{q_2 - q_{xy}}{q_2}$, а функция частотного расстояния $d'(x,y) = \dfrac{q_1 - q_{xy}}{q_1}$ удовлетворяет лишь аксиомам 1,2,3.

Информационная семантика введенных функций от двоичных признаков и соответствующих им классов объектов со свойствами $x = 1$, $y = 1$ раскрывается определениями: частотная метрика есть относительная ошибка предсказания малого признака по значению большого, а частотное расстояние есть ошибка предсказания большого признака по малому. Зная частотное расстояние, можно вычислить коэффициент **метрической корреляции** $r_{xy}^M = 1 - 2d'_{xy} = \dfrac{2q_{xy}}{q_1} - 1$, он изменяется в стандартных пределах $-1 \le r^M \le 1$ и если $\left| r^M \right| = 1$, то между двоичными признаками существует логическая связь.

Функции $d(x, y)$ и $d'(x, y)$ определяют частотную метризацию множества всех подмножеств универсума предметики – экспоненциала (булеана) 2^U универсума и выражают количественную частотную меру сходства (эквивалентности, близости) или различия между всеми свойствами и всеми классами объектов предметной области. Мера $d(x,1) = 1 - q_x$ характеризует различие (удаленность) свойства x от универсального свойства, присущего всем объектам, и равна ошибке высказывания “все объекты обладают свойством x” в шкале частотной истинности. Экспоненциал 2^U универсума, а чаще его малое подмножество, образует в соответствии с предметной семантикой одну или несколько иерархий классов объектов, в которых устанавливают **условные** или **иерархические шкалы частотной истинности**, справедливые при выполнении некоторого условия $c = 1$ для класса объектов со свойством c. Условная истинность измеряется либо в объеме класса c, который в этом случае выполняет роль универсума, тогда мера условной истинности $q(a \,|\, c) = \dfrac{N_{ac}}{N_c} = \dfrac{q_{ac}}{q_c}$ – условная частость распределения свойств a в классе c, либо иерархическая истинность измеряется в объеме универсума как безусловная истинность условного высказывания $c \to a =$“если c, то a”, см. далее. Если условие c выделяет единичный объект – индивид универсума, то условная и истинность принимает классические двоичные значения: $q(a \,|\, c) = 0$ или 1, если же условие внутренне противоречиво и класс c пустой, то частотная истинность становиться неопределенной: $N_c = 0$, $N_{ac} = 0$.

Следовательно, двоичная логика с частотной шкалой истинности, в которой определена доля истинных q_a и доля ложных $q_{\bar{a}} = 1 - q_a$ значений произвольного высказывания или предиката a в универсуме либо в некотором его подмножестве объектов со свойством c, оперирует классами объектов и их свойствами, используя стандартные операции и отношения классической логики: $\overline{a} =$ отрицание, $a \cdot b =$ логическое произведение (конъюнкция свойств, пересечение классов), $a - b = a \cdot \overline{b} =$ логическое вычитание, $a + b =$ логическое сложение (дизъюнкция, объединение), $a \oplus b =$ сложение по модулю 2 (антиэквиваленция), а также отрицания этих функций: $a | b =$ И–НЕ (штрих Шеффера), $a \to b$ – импликация, $a \downarrow b =$ ИЛИ–НЕ (стрелка Пирса), $a \leftrightarrow b =$ эквиваленция.

Логические функции, построенные из этих девяти операций, описывают любые преобразования классов объектов универсума. Эквивалентные преобразования, сохраняющие классы, называются законами классической логики: ассоциативность, коммутативность сложения и умножения, дистрибутивность, законы поглощения, де Моргана и двойного отрицания. Эти законы, очевидно, переносятся без изменения и в частотную логику.

Каждой логической функции $f(x)$, описывающей составной класс из классов–аргументов $(x_1,...,x_n) = x$, в частотной логике сопоставляется вещественная функция ее частотной истинности $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{f},(\underline{x}) \in \mathrm{Re}al$, в стандартном базисе вещественной арифметики и алгебры с операциями $+,-,\cdot,/$. Для унарной операции отрицания $\overline{a}$ ее функция истинности $\underline{\overline{a}} = 1 - \underline{a}$, для бинарных логических операций $c = f(a,b)$ функции их истинности $\underline{c} = \underline{f}(\underline{a},\underline{b},\underline{ab})$ легко выводятся из геометрического представления классов объектов на диаграмме Эйлера: $\underline{a+b} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{ab}$, $\underline{a-b} = \underline{a} - \underline{ab}$, $\underline{a \oplus b} = \underline{a} + \underline{b} - 2\underline{ab}$, $\underline{a|b} = 1 - \underline{ab}$, $\underline{a \downarrow b} = 1 - \underline{a} - \underline{b} + \underline{ab}$, $\underline{a \to b} = 1 - \underline{a} + \underline{ab}$, $\underline{a \leftrightarrow b} = 1 - \underline{a} - \underline{b} + 2\underline{ab}$. В общем, случае *n*-арных операций их истинности определяются всеми моментами – частостями произведений аргументов от первого до *n*-го порядка. Представим логическую функцию $f(a_1,a_2,...a_n)$ в полиномиальной (дизъюнктивной) форме – в булевом базисе $(+,\cdot,-)$ тогда, используя диаграммы Эйлера легко вывести основные формулы частотной истинности произвольной логической суммы логических произведений позитивных и негативных двоичных признаков [7,8]:

1) частотная истинность произведения позитивных признаков $\lfloor a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n \rfloor = \underline{a}_{1\ldots n}$ есть смешанный момент их распределения, определяемый внелогическими методами как исходные данные частотной логики,

2) $\lfloor a_1 + a_2 + \ldots a_n \rfloor = \sum\limits_i \underline{a}_i - \sum\limits_{i>j} \underline{a}_{ij} + \ldots \pm \underline{a}_{1\ldots n}$ – истинность позитивной логической суммы,

3) $\lfloor \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots \bar{a}_n \rfloor = 1 - \underline{a}_{1\ldots n}$ – истинность негативной логической суммы,

4) $\lfloor a_1 + \ldots + a_2 + \bar{a}_3 + \ldots + \bar{a}_4 \rfloor = 1 - \underline{a}_{3\ldots 4} + \sum\limits_i \underline{a}_{i3\ldots 4} - \sum\limits_{i>j} \underline{a}_{ij3\ldots 4} + \ldots \pm \underline{a}_{1\ldots 23\ldots 4}$ – истинность позитивно-негативной логической суммы,

5) $\lfloor \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \ldots \bar{a}_n \rfloor = 1 - .. \sum\limits_i \underline{a}_i + \sum\limits_{i>j} \underline{a}_{ij} - \ldots \pm \underline{a}_{1\ldots n}$ – истинность негативного логического произведения,

6) $\lfloor a_1 \ldots a_2 \cdot \bar{a}_3 \ldots \bar{a}_4 \rfloor = \underline{a}_{1\ldots 2} - \sum\limits_i \underline{a}_{1\ldots 2i} + \sum\limits_{i>j} \underline{a}_{1\ldots 2ij} - \ldots \pm \underline{a}_{1\ldots 23\ldots 4}$ – истинность позитивно-негативного логического произведения. Очевидно, эти формулы воспроизводят истинности бинарных операций и для произвольной логической функции, удовлетворяют основному априорному условию. Если аргументы истинностной функции принимают предельные значения частотной шкалы истинности – 0 или 1, то вещественная функция, как и все промежуточные суммы и произведения, также принимают крайние двоичные – нулевые либо единичные значения истинности.

Итак, в частотной логике происходит расщепление дентовой и контовой семантики понятий, $f \neq \underline{f}$, разотождествление дента – объема понятия, представленного функцией множества $f(x)$ в алгебре Кантора посредством теоретико-множественных операций $(\cup,\cap,/\ ) \approx (+,\cdot,-)$, и конта – составного свойства, выраженного в данном контексте частотной истинностью $\underline{f}(\underline{x})$ высказывания или предиката о составном классе объектов $f(x)$. В классической логике эти функции отождествляются абстрагированием, при котором алгебра Кантора и алгебра Буля совпадают: $\cup = \vee = +$, $\cap = \wedge = \cdot$, $/ = -$, что предопределяется двоичной шкалой истинности, т.к. если $\underline{f} = 1$ или 0, то $\underline{f} = f$ в двоичном булевом базисе.

Второе важное отличие частотной логики от классической состоит в том, что для оценки истинности логической функции в частотной шкале недостаточно знать истинности аргументов, кроме этого необходимо определить все виды частотных связей между парами, тройками и т.д. признаков, т.е. надо знать все гиперсвязи аргументов, чтобы получить точное значение частотной истинности функции $f(x)$. В двоичной шкале высшие моменты однозначно определяются моментами первого порядка $\underline{ab} = \underline{a} \cdot \underline{b}$, $\underline{abc} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}, \ldots$ и вещественная функция истинности точно воспроизводится логической функцией в двоичной арифметике булевой алгебры.

Частотная истинность $\underline{x}$ элементарного или составного высказывания x несёт информацию не только о средней, ожидаемой истинности x в заданном классе ситуаций, но и полностью определяет меру неопределённости и ожидаемой изменчивости частотной оценки $\underline{x}$, что упрощает анализ достоверности и процесс принятия решений. Это связано со свойствами двоичной шкалы, в которой высшие моменты определяются моментами первой степени, т.к. $0^n = 0,\ 1^n = 1$, поэтому квадратическая ожидаемая неопределённость $\underline{x} \pm \sigma_x$ вычисляется по формуле $\sigma_x^2 = \underline{x}(1-\underline{x})$. Аналогично выражаются линейная и логарифмическая меры – альтернант L_x и энтропия H_x истинности, а также ее предельные вариации – радиус R_x и диаметр D_x области неопределённости значений истинности [7]. В шкале частотной истинности выражаются не только недоопределённости в знании истины, но и одновременно выражаются переопределённости или противоречия, т.к. N_a примеров, образцов говорят о том, что $a = 1$, но $N - N_a$ эталонов убеждают, что $a = 0$.

Частотная логика, как и классическая, абстрагируется от конкретных моделей предметики и оценивает истинность составных высказываний по частотным связям, то есть модели частотной логики являются такими же абстракциями от семантики предметных связей, как и логические связи, поэтому здесь также справедливы заключения типа “если 2×2 = 5, то завтра взойдет Солнце”.

Изложенный формализм частотной логики и его семантика построены для идеального информационно-логического процесса. Выдвинутый постулат или гипотеза его идеальности как бы освобождает нас от необходимости конструктивного либо дескриптивного определения истины и лжи, их мер и видов. В действительности это не так, что становится ясным при переходе к описанию реальных знаковых процессов. В основе адекватной формализации их информационной семантики в системе *obsubj* лежит **принцип расщепления** модели любого объекта на фактическую (реальную) и действительную (идеальную, истинную) модель объекта. Конструктивным воплощением этого принципа служит **схема косвенного обращения – СКО** информационно-логического процесса, в простейшей форме представленная граф схемой [7]:

$$\left.\begin{array}{l} U \xrightarrow{\Gamma} obj \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} \hat{x} \\ \qquad\;\; obj \xrightarrow{\qquad C \qquad} x \end{array}\right| \xrightarrow{D} \Delta \xrightarrow{S} \Delta_S \; ,$$

где U – универсум информационных ситуаций, Г – **генóр**, модель генерации проблемных ситуаций и выбора очередного объекта из универсума; $y = A(obj)$ – результат сенсорного процесса, информационный объект на выходе сенсора A; $\hat{x} = B(y)$ – результат обработки, рассуждения *obsubj* на выходе рефора B; $x = C(obj)$ – истинное (действительное, идеальное) значение свойств изучаемого объекта на выходе **аккуратора** C – целевого оператора исследования (идеального наблюдателя, истинной модели, прецизионной, системы), точность которой неизмеримо выше, чем точность реального наблюдателя $AB \neq C$. Сравнение истины x и ее фактической оценки $\hat{x}$ выполняет **адекватор** D и выдает оценку адекватности $\overline{\Delta}$ или ошибочности, ложности Δ фактического значения $\hat{x}$ о конкретном объекте – индивиде *obj*. Индивидные оценки истинности или ложности накапливаются в операторе связи S и по завершению исследования универсума на выходе S выдается сводная (средняя, ожидаемая, предельная) оценка достоверности или ошибочности результата работы сенфора AB в данном классе объектов предметики: $\Delta_S = S(\{\Delta\})$.

При построении логики с информационной семантикой модель знакового процесса конкретизируют и в СКО включают искажения сенсорного процесса, ошибки вычисления, априорную неопределенность. Информационные объекты $y, \hat{x}, x, \Delta, \Delta_{S,} \ldots$в модели СКО могут иметь произвольную структуру, размерность, форму представления, согласованную с семантикой преобразований, но в моделях классической и частотной логики знаковые объекты задаются наборами двоичных переменных.

Если в СКО отсутствует сенсор A и система *obsubj* не связана с материальной реальностью, то индивидные $\overline{\Delta}$ и сводная $\overline{\Delta}_S$ оценки адекватности выражают теоретическую (логическую) истинность, в соответствии с сокращенной моделью теоретической СКО:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \longrightarrow obj \xrightarrow{B} \hat{x} \\ \qquad\qquad\ \llcorner \xrightarrow{C} x \end{array}\right| \xrightarrow{D} \Delta \xrightarrow{S} \Delta_S \ ,$$

которая оценивает соответствие теоретических моделей реальной *B* и идеальной (воображаемой, абстрактной) действительности *C*, при этом модель *C* принимается по определению за истинную. Полная экспериментально-теоретическая СКО оценивает аристотелеву (фактическую, экспериментальную) истинность – меру соответствия фактического знания $\hat{x}$ действительности. Заметим, что сокращенная СКО определяет также те правила преобразования – теоретически допустимые рефоры *B*, которые не нарушают истинности результатов $\hat{x} = x$.

Для пары двоичных переменных $(\hat{x}, x)$, заданных в номинативной шкале {да, нет}, возникает два типа истины $И_1$=(да, да), $И_2$=(нет, нет), и два типа ошибок или лжи $Л_1$=(да, нет), $Л_1$=(нет, да), от различия которых в логике абстрагируются и переводят в единую логическую шкалу {*Л, И*}, а затем в числовую битовую шкалу {0,1}, отвлекаясь от значений двоичных свойств в конкретной или абстрактной номинативной шкале и оценок их истинности.

Индивидная оценка логической адекватности в единичной ситуации является двоичной функцией пяти аргументов $\overline{\Delta}(A, B, C, D, obj)$, заданной в логической {*Л, И*} или при *И*=1, *Л*=0 в абстрактной двоичной шкале. Г. Фреге при формализации логической семантики ввел понятие истинностной функции или предиката *P(obj)*, принимающего значения в шкале {*Л, И*}. Сопоставляя предикат с индивидной функцией адекватности, заданной в логической шкале, легко заключить, что в информационной семантике предикатор P расщепляется на четыре оператора схемы СКО, $P(obj) = \overline{\Delta}(A, B, C, D, obj)$, значит, *P*=*ABCD*= сенсор + рефор + аккуратор + адекватор.

Множественная оценка адекватности $\overline{\Delta}_S$ есть функция шести аргументов –процессоров СКО: $\overline{\Delta}_S(A, B, C, D, \Gamma, S)$. Ее аргументы составляют априорную информацию исследователя, строящего модель знакового процесса. Значение функции $\overline{\Delta}_S$ задается в шкале оператора связи *S.* В классической логике это двоичная шкала, совпадающая со шкалой адекватора $D(\hat{x},x)=\overline{\Delta}$, равного 1, при $\hat{x}=x$ и 0 при $\hat{x}\neq x$, а оператор связки *S* есть квантор $\forall obj$ либо квантор $\exists obj$, связывающие по универсуму U*,* или *S* есть ограниченный (условный) квантор. В частотной логике адекватор $\hat{x}\leftrightarrow x$ остается классическим, $\overline{\Delta}=\hat{x}\leftrightarrow x$, а шкала истинности есть вещественный интервал $0\leq\overline{\Delta}_S\leq 1$ средних значений истинности $\overline{\Delta}_S=\frac{1}{N}\sum\overline{\Delta}(obj)$ в заданном классе информационных ситуаций: $S=M(\cdot)$ – оператор математического ожидания.

Сопоставляя построенную модель СКО с моделью идеального информационно-логического процесса можно заключить, что полученные выше формулы частотной логики без всяких изменений переносятся на оценки связей переменных модели СКО, в чем можно убедиться, дословно повторяя вывод формул. Если вычислить моменты распределения $q(x,\hat{x}.y,\Delta)$, то все задачи анализа достоверности и оптимизации операторов наблюдений *A* и логического вывода *B* могут быть поставлены и решены, используя аппарат частотной логики. Ошибки наблюдений и априорных данных *ABCDГS* размывают частотные и логические связи, но полученные выше формулы частотной логики остаются неизменными для реальных и идеальных процессов.

В качестве примера использования формул частотной логики оценим истинность логического вывода по схеме отделения модус поненс:

$a,a\rightarrow b\vdash b=$“если a и $a\rightarrow b$ истинны, то b также истинно”. В информационной практике частотные истинности посылки и импликации могут значимо отличаться от идеального значения 1, что ведет к потере надежности логического заключения: $\underline{b}<1$. Ошибки посылки a связаны с искажениями процессов наблюдения, вычисления, рассуждения, в результате высказывание a заменяется на оценку $\hat{a} = a \oplus \mathrm{v}$, v – двоичный признак помехи процесса: при v=0 имеем $\hat{a} = a$, если же v=1, то оценка $\hat{a} = \overline{a}$. Ошибки исходной импликации $a \to b$ составляют класс $\Delta_{im} = a - \overline{b}$, для реальной импликации $\hat{a} \to \hat{b}$ класс ошибочных решений есть $\hat{a} - b = \hat{b} - b = \Delta b$.

Оценим истинность $1 - \Delta b$ позитивного логического вывода “если $\hat{a} = 1$, то $\hat{b} = 1$” используя формулы частотной логики: $\hat{a} \to b = a \oplus \mathrm{v} \to b =$ $a \leftrightarrow \mathrm{v} + b = a\mathrm{v} + \overline{a} \cdot \overline{\mathrm{v}} + b = a_1 + a_2 + a_3$, где $a_1 = a \cdot \mathrm{v}$, $a_2 = \overline{a} \cdot \overline{\mathrm{v}}$, $a_3 = b$. Истинность этого логического полинома определяется по формулам (1÷6) частотной логики: $\underline{\hat{a} \to b} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3 - \underline{a}_{12} - \underline{a}_{13} - \underline{a}_{23} + \underline{a}_{123}$, $\underline{a}_1 = \underline{a\mathrm{v}}$, $\underline{a}_2 = 1 - \underline{a} - \underline{\mathrm{v}} + \underline{a\mathrm{v}}$, $a_{12} = a_{123} = 0$, $\underline{a}_{13} = \underline{ab\mathrm{v}}$, $\underline{a}_{23} = \underline{\overline{a}b\overline{\mathrm{v}}} =$ $b - \underline{ab} - \underline{b\mathrm{v}} + \underline{ab\mathrm{v}}$, в итоге ошибка $1 - \underline{\hat{a} \to b} = \underline{a} - \underline{ab} + \underline{\mathrm{v}} - 2\underline{a\mathrm{v}} - \underline{b\mathrm{v}} + 2\underline{ab\mathrm{v}}$. Первые два числа определяют ошибку логического правила $a \to b$, остальные члены выражают влияния помехи v и ее связи с признаками a и b, которые могут увеличивать ошибки логического вывода либо уменьшать их, компенсируя ошибки импликации. Если последние отсутствуют, $\underline{a} = \underline{ab}$, то $\underline{\Delta b} = \underline{\mathrm{v}} - \underline{b\mathrm{v}} \geq 0$, т.е. искажения v, не выводящие наблюдения из класса b, не влияют на истинность заключения: при $\underline{\mathrm{v}} = \underline{b\mathrm{v}}$ логический вывод точен, $\underline{\Delta b} = 0$.

Частотная логика заведомо сложнее классической – это машинно-ориентированный инструмент информационных технологий, обладающий точными средствами контроля знаковых преобразований. Он плохо приспособлен для человеческих рассуждений на естественном языке, но в отличие от классической, частотная логика адекватно описывает реальные, более сложные информационные связи, а в асимптотике, когда истинности приближаются к предельным значениям 0 или 1, частотная логика точно воспроизводит классическую. Частотная шкала, в которой меры истинности или ошибок измеряются в долях единичного объема класса объектов предметики либо в процентах, имеет ясную естественнонаучную семантику, более адекватную реальным процессам, чем гипотезы или постулаты двоичной истинности (ложности) классической логики. Кроме того, частотную меру истинности легче преобразовать в ценностный критерий.

Частотная логика моделирует многие неклассические логики и оценивает границы их достоверности, вводит в дискретно-логические методы идеи и алгоритмы логической аппроксимации при *NP*–сложности задачи, неполноте и искажениях фактических и априорных данных [7]. Так, если высшие моменты логических признаков неизвестны, то возникают одномоментные и двухмоментные лапласовы приближения корреляционной логики [8]. Частотная логика есть обобщение вероятностной логики, построенное при более полной формализации понятия внутренней неопределенности – индефиниции и отделения неопределенности от теоретико-вероятностной случайности. Частичный порядок и метрика, порожденные априорикой информационной задачи, вместе с идеей логической аппроксимации позволяют преодолеть комбинаторный взрыв и *NP*–сложность логических задач.

Естественным обобщением двоичной частотной логики, рассмотренной выше, служит номинативная частотная логика, в которой двоичная шкала адекватора (0, 1) расширяется введением разных типов ошибок, внутренних и внешних неопределенностей [7].

Список литературы

1. *Bolc L., Borowic P.* Many–valued logics: Theoretical foundations. Vol. 1. Berlin, 1992.
2. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. – М.: Ил, 1959. – 311с.
3. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. – М.: ИЛ, 1957. – 526с.
4. *Белнап Н., Стил Т.* Логика вопросов и ответов – М., Прогресс, 1981. – 271с.
5. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165с.
6. Семантика модальных и интенсиональных логик. – М.: Прогресс, 1981. – 424с.
7. *Зверев Г.Н.* Основания теоретической информатики. Разд. 1 – 7. – Уфа, Уфим. авиац. университет, 1995 – 97.

8. *Зверев Г.Н.* Оценка надежности и оптимизация качественной интерпретации // Техника и технология геофизических исследований скважин. – Уфа, БНИПИ, 1979, С. 145-155.